ALGEBRAISCHE SINGULARITÄTEN ANALYTISCHER RÄUME

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Jörg Schnitker
aus Elsfleth

Göttingen 1973

ALGEBRAISCHE SINGULARITÄTEN ANALYTISCHER RÄUME

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Jörg Schnitker
aus Elsfleth

Göttingen 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr. H.Grauert

Korreferent: Dr. W. Bartenwerfer

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Mai 1973

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Kapitel I: Kategorientheoretische Vorbereitungen

1. Kategoriensysteme 1

2. Basiswechsel 10

3. Systeme von Funktorkategorien 14

4. Limites 20

Kapitel II: Algebraische Vorbereitungen

5. Die Kategorie $\tilde{C}$ der (k,0)-Algebren 27

6. Die Kategorie C der R-Algebren 31

7. Projektive Limites in C und Funktorkategorien 40

8. Induktive Limites in C und ausschöpfende Funktoren 48

Kapitel III: Formale Algebraisierung

9. Datensysteme 56

10. Liftungsbedingungen 60

11. Ein Algebraisierungssatz 65

Kapitel IV: Approximierbare Funktoren

12. Einfache Beispiele approximierbarer Funktoren 69

13. Approximierbare Lösungsfunktoren 71

14. Approximierbare Isomorphieklassenfunktoren von Systemen von Funktorkategorien 76

15. Approximierbare Isomorphieklassenfunktoren von Erweiterungen eines Kategoriensystems 88

16. Dimensionserhaltende Approximation 94

Kapitel V: Algebraische Singularitäten analytischer k-Räume

17. Lokal-algebraische analytische k-Räume 102

18. Anmerkungen zur Anwendung des formalen Algebraisierungssatzes 109

Literaturverzeichnis

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534922_0010

Einleitung

Es sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $\mathcal{H}^d$ die Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}^d$. Wir nennen einen komplexen Raum $Y = (|Y|, \mathcal{O}_Y)$ lokal-algebraisch in $y \in |Y|$, wenn eine Umgebung $(V, \mathcal{O}_Y|V)$ von y in Y biholomorph auf einen offenen Unterraum eines durch Polynome definierten abgeschlossenen Unterraums von $(\mathbb{C}^d, \mathcal{H}^d)$ abgebildet werden kann. Aufgrund der Antiäquivalenz der Kategorie der Raumkeime und der Kategorie der analytischen $\mathbb{C}$-Algebren ist dies genau dann der Fall, wenn ein durch Polynome erzeugtes Ideal $\mathfrak{b}$ in der Algebra $\mathbb{C}\{\langle X\rangle\}$ der konvergenten Potenzreihen in $X=(X_1,\ldots,X_d)$ mit $\mathcal{O}_{Y,y} \simeq \mathbb{C}\{\langle X\rangle\}/\mathfrak{b}$ existiert.

Nun kann einerseits die Isomorphie $\mathcal{O}_{Y,y} \simeq \mathbb{C}\{\langle X\rangle\}/\mathfrak{b}$ bereits aus $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}} \simeq \mathbb{C}[[X]]/\mathfrak{b}.\mathbb{C}[[X]]$ geschlossen werden ($\mathbb{C}[[X]]$ bezeichnet die Algebra der formalen Potenzreihen). Andererseits gibt es zu jedem durch algebraische Funktionen erzeugten Ideal $\bar{\mathfrak{a}} \subset \mathbb{C}[[X]]$ ein durch Polynome erzeugbares Ideal $\mathfrak{a}' \subset \mathbb{C}[[X, X_1', \ldots, X_N']]$ mit $\mathbb{C}[[X,X']]/\mathfrak{a}' \simeq \mathbb{C}[[X]]/\bar{\mathfrak{a}}$. Also ordnet sich die Frage, ob ein gegebener komplexer Raum in einem Punkt lokal-algebraisch ist, dem folgenden Problem unter:

Sei $\bar{\mathfrak{a}} \subset \mathbb{C}[[X]]$ ein Ideal; existiert ein Ideal $\mathfrak{a}$ im Ring $\mathbb{C}\{X\}$ der algebraischen Funktionen mit

$$(\mathbb{C}\{X\}/\mathfrak{a})^{\wedge} \simeq \mathbb{C}[[X]]/\bar{\mathfrak{a}} \,?$$

Bei der Untersuchung dieses und ähnlicher Probleme wenden wir approximative Methoden an. Grundlegend ist dabei der Satz über die Approximation formaler Lösungen algebraischer Gleichungssysteme von M.Artin (siehe (13.3.4)).

Zur Erläuterung des Lösungsansatzes betrachten wir die Algebra $\bar{A} := \mathbb{C}[[X]]/\bar{\mathfrak{a}}$, ein weiteres Ideal $\bar{\mathfrak{b}} \subset \mathbb{C}[[X]]$ und die Algebra $\bar{B} := \mathbb{C}[[X]]/\bar{\mathfrak{b}}$. Ein Isomorphismus $\varphi: \bar{A} \to \bar{B}$ induziert natürlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Isomorphismus $\bar{A}/\mathfrak{m}(\bar{A})^n \to \bar{B}/\mathfrak{m}(\bar{B})^n$. Umgekehrt läßt sich jedoch aus Dimensionsgründen zu $\bar{A}$ kein n_o angeben, derart daß aus einer Isomorphie $\bar{A}/\mathfrak{m}(\bar{A})^{n_o} \simeq \bar{B}/\mathfrak{m}(\bar{B})^{n_o}$

die Isomorphie $\overline{A} \simeq \overline{B}$ geschlossen werden kann. Gilt $\dim\overline{B} = \dim\overline{A}$, so ist dies unter Umständen möglich; z.B. dann, wenn $\overline{A}$ die Komplettierung des Halmes $\mathcal{O}_{Y,y}$ einer isolierten Singularität bezeichnet. I.a. ist ein derartiger Schluß nur unter der Voraussetzung $\dim\overline{B} = \dim\overline{A}$ jedoch falsch. Zu jedem $\overline{A}$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ kann stets ein durch algebraische Funktionen erzeugtes Ideal $\overline{\sigma}$ mit $\dim\overline{B} = \dim\overline{A}$ und $\overline{A}/\mathfrak{m}(\overline{A})^n \simeq \overline{B}/\mathfrak{m}(\overline{B})^n$ gefunden werden (siehe Satz (16.3)). Können wir also zu $\overline{A}$ ein n_o mit der genannten Eigenschaft angeben, so ist $\overline{A}$ 'algebraisierbar'. Doch schon zweidimensionale Integritätsbereiche haben diese Eigenschaft i.a. nicht (vgl.(17.3)).
Selbst für algebraisierbares $\overline{A}$ kann man i.a. kein Isomorphiekriterium des obigen Typs angeben. Wird $\overline{A}$ z.B. durch das Polynom

$$X_1(X_1 - X_2^2)(X_1 - (2 + X_3)X_2^2)$$

definiert, so stimmt die durch

$$X_1(X_1 - X_2^2)(X_1 - (2 + X_3 + X_3^{n+1})X_2^2)$$

festgelegte Algebra $\overline{B}$ zwar modulo $\mathfrak{m}^n$ mit $\overline{A}$ überein, $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind jedoch nicht zueinander isomorph.(H.Whitney [1], Example 15.5).

Hierdurch wird nahegelegt, von Isomorphiekriterien anderer Art auszugehen. Und zwar verwenden wir Bedingungen (×) folgender Natur:

> Ist $\varphi: \overline{A} \longrightarrow \overline{B}$ ein Homomorphismus, und erfüllt φ die Bedingung (×), so ist φ bijektiv.

Aufgabe der Algebraisierung wird es nun offenbar, die Bedingung (×) für einen Homomorphismus φ zwischen $\overline{A}$ und einer algebraisierbaren Algebra $\overline{B}$ nachzuweisen. Da die i.f. zugelassenen Kriterien (×) 'approximierbar' sind(siehe Abschnitt 9, insbesondere Definition(9.5)), werden die 'Kandidaten' $\overline{B}$ auf einfachem Wege erhältlich sein; nur unter zusätzlichen Voraussetzungen (Abschnitt 10) kann jedoch die Existenz von φ garantiert werden.

Das Anliegen dieser Arbeit ist es, den Algebraisierungsprozeß bei vorgegebenem Kriterium $(\varkappa)$ darzustellen. An $(\varkappa)$ werden dabei gewisse formale Bedingungen gestellt, die sich in erster Linie auf das Verhalten der durch $(\varkappa)$ gegebenen 'Daten' beim Basiswechsel beziehen. Kapitel I beschäftigt sich vor allem mit diesen funktoriellen Forderungen.

Der zugrundeliegende Körper ist i.f. beliebig; wir bezeichnen ihn mit k. Alle Betrachtungen werden i.w. über der Kategorie der (k,0)-Algebren durchgeführt. Unter einer (k,0)-Algebra verstehen wir ein Paar $S = (|S|, \mathfrak{s})$, bestehend aus einer k-Algebra $|S|$ und einem Ideal $\mathfrak{s} \subset |S|$ mit $\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \mathfrak{s}^\nu = (0)$; (k,0)-Algebrahomomorphismen $\varphi: S \to S'$ sind k-Algebrahomomorphismen $\varphi: |S| \to |S'|$ mit $\varphi(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}'$. In Kapitel II werden die benötigten Aussagen über (k,0)-Algebren zusammengestellt.

In Kapitel III behandeln wir das folgende - hier etwas vereinfacht dargestellte - Algebraisierungsproblem: Sei R eine semilokale (k,0)-Algebra, $\hat{R}$ die Komplettierung von R, $i: R \to \hat{R}$ die natürliche Inklusion, $\otimes_i$ der beim Basiswechsel erhaltene Funktor der Kategorie der R-Algebren in die Kategorie der $\hat{R}$-Algebren, und sei $\overline{T}$ eine endliche $\hat{R}$-Algebra; existiert eine R-Algebra T mit $\otimes_i(T) \simeq \overline{T}$? In Abschnitt 11 beweisen wir einen formalen Algebraisierungssatz.

Kapitel IV beschäftigt sich mit approximierbaren Funktoren, die bei der Algebraisierung eine wichtige Rolle spielen. Wir beweisen insbesondere Approximationssätze für Funktoren, die beim Übergang von Daten zu Isomorphieklassen von Daten entstehen (siehe (1.12)). Hierbei sind jedoch nur Daten in Betracht gezogen worden, die durch Vorgabe von Algebren definiert werden. Bei der - für Anwendungen gewiß notwendigen - Einbeziehung von Moduln verfährt man analog.

In Kapitel V gehen wir kurz auf den schon erwähnten Zusammenhang mit der Theorie der Singularitäten analytischer Räume ein.

Herrn Prof. Dr. Hans Grauert danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

I. Kategorientheoretische Vorbereitungen

1. Kategoriensysteme

(1.1) In der vorliegenden Arbeit wird zur Vereinfachung der Sprechweise der naive Kategorienbegriff verwendet, obwohl dies in mehreren Zusammenhängen Widersprüche mengentheoretischer Natur zur Folge hat. Die Widersprüche lassen sich jedoch ohne Schwierigkeiten bei Bezugnahme auf ein festes Universum $\mathfrak{U}$ vermeiden, wenn gelegentlich eine Einschränkung auf kleine Kategorien bzw. eine Erweiterung von $\mathfrak{U}$ durch ein Universum $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{U} \in \mathfrak{V}$ vorgenommen wird (Schubert [1]).
Ist C eine Kategorie, so bezeichnet
(1) $|C|$ die Klasse der Objekte von C,
(2) $\mathrm{Hom}_C(S,S')$ die Menge der C-Morphismen mit Quelle S und Ziel S',
(3) MorC die Klasse aller C-Morphismen,
(4) MorC$\circ$MorC die Klasse aller Paare $(\varphi',\varphi) \in (\mathrm{MorC}) \times (\mathrm{MorC})$, für die $\varphi' \circ \varphi$ erklärt ist (d.h. Zielφ = Quelleφ').
Ens sei die Kategorie der ($\mathfrak{U}$-) Mengen. Alle auftretenden Funktoren sind covariant.

(1.2) Seien C, C' Kategorien und F,G: C $\longrightarrow$ C' Funktoren. Eine Familie $\eta = (\eta_S)_{S \in |C|}$ von C'-Morphismen $\eta_S \in \mathrm{Hom}_{C'}(F(S),G(S))$ heißt eine natürliche Transformation F $\longrightarrow$ G, wenn für jedes Paar $(S,S') \in |C| \times |C|$ und jeden C-Morphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(S) & \xrightarrow{\eta_S} & G(S) \\ {\scriptstyle F(\varphi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\varphi)} \\ F(S') & \xrightarrow[\eta_{S'}]{} & G(S') \end{array}$$

kommutativ ist. In naheliegender Weise werden Komposition von natürlichen Transformationen und identische natürliche Transformationen erklärt. Man gelangt so zur Funktorkategorie [C,C']; die Funktoren C $\longrightarrow$ C' bilden die Objekte, die natürlichen Transformationen die Morphismen dieser Kategorie (Schubert [1], Kapitel 3).

(1.3)Sind Funktoren $C \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} C' \xrightarrow{F'} C''$ und eine natürliche Transformation $\eta : F \to G$ gegeben, so erhält man durch die Festlegung

$$(F' \circ \eta)_S := F'(\eta_S) \qquad (S \in |C|)$$

eine natürliche Transformation $F' \circ \eta : F' \circ F \to F' \circ G$. Für Funktoren $C \xrightarrow{F} C' \underset{G'}{\overset{F'}{\rightrightarrows}} C''$ und eine natürliche Transformation $\eta' : F' \to G'$ gewinnt man durch

$$(\eta' \circ F)_S := \eta'_{F(S)} \qquad (S \in |C|)$$

eine natürliche Transformation $\eta' \circ F : F' \circ F \to G' \circ F$. Die Komposition zwischen Funktoren und natürlichen Transformationen erfüllt folgende Regeln (Schubert [2], 16.1.1):

(1) Seien $F: C \to C'$, $F', G', H' : C' \to C''$, $F'' : C'' \to \bar{C}$ Funktoren und $\eta' : F' \to G'$, $\xi' : G' \to H'$ natürliche Transformationen. Es gilt
$$F'' \circ (\xi' \circ \eta') \circ F = (F'' \circ \xi' \circ F) \circ (F'' \circ \eta' \circ F).$$

(2) Seien $F, G : C \to C'$, $F', G' : C' \to C''$ Funktoren und $\eta : F \to G$, $\eta' : F' \to G'$ natürliche Transformationen. Es gilt
$$(\eta' \circ G) \circ (F' \circ \eta) = (G' \circ \eta) \circ (\eta' \circ F).$$

(1.4)Sei C eine Kategorie, und seien folgende Größen gegeben:

(1) für jedes $S \in |C|$ eine Kategorie $K(S)$

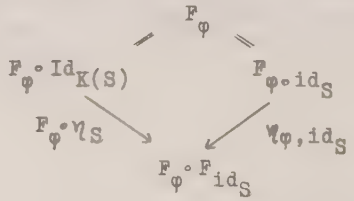
(2) für jedes Paar $(S,S') \in |C| \times |C|$ und jeden Morphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ ein Funktor $F_\varphi : K(S) \to K(S')$

(3) für jedes $S \in |C|$ ein natürlicher Isomorphismus
$$\eta_S : \mathrm{Id}_{K(S)} \xrightarrow{\sim} F_{\mathrm{id}_S}$$

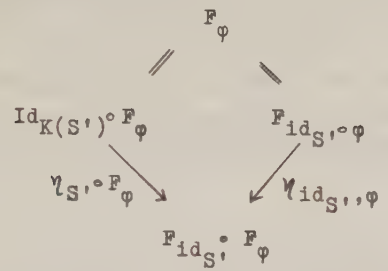
(4) für jede C-Sequenz $S \xrightarrow{\varphi} S' \xrightarrow{\varphi'} S''$ ein natürlicher Isomorphismus
$$\eta_{\varphi;\varphi} : F_{\varphi'} \circ F_\varphi \longrightarrow F_{\varphi' \circ \varphi} .$$

Dann können wir folgende Diagramme betrachten:

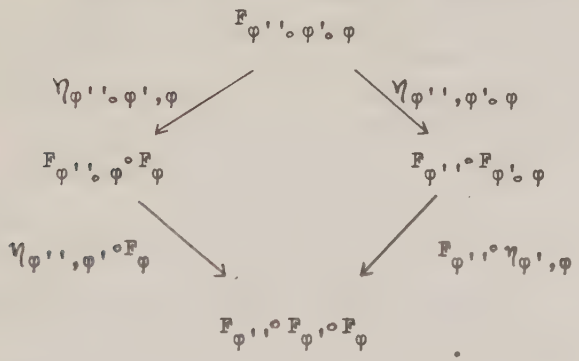
(5) für Sequenzen $S \xrightarrow{\mathrm{id}_S} S \xrightarrow{\varphi} S'$ das Diagramm



(6) für Sequenzen $S \xrightarrow{\varphi} S' \xrightarrow{id_{S'}} S'$ das Diagramm



(7) für Sequenzen $S \xrightarrow{\varphi} S' \xrightarrow{\varphi'} S'' \xrightarrow{\varphi''} \tilde{S}$ das Diagramm



(1.5) Definition

Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in (1.4). Das Quadrupel

$$\underline{K} := \left((K(S))_{S \in |C|},\ (F_\varphi)_{\varphi \in MorC},\ (\eta_S)_{S \in |C|},\ (\eta_{\varphi',\varphi})_{(\varphi',\varphi) \in MorC \circ MorC} \right)$$

heißt ein Kategoriensystem über C, falls die Diagramme (1.4.5), (1.4.6) und (1.4.7) stets kommutativ sind.

Wir schreiben i.f. kurz $\underline{K} = (K(S), F_\varphi, \eta_S, \eta_{\varphi',\varphi})$ für das Quadrupel der in (1.5) angegebenen Familien von Kategorien, Funktoren und natürlichen Transformationen.

Offenbar kann man auf trivialem Wege Kategoriensysteme konstruieren. Bezeichnet cat die Kategorie der Kategorien (vgl. Anmerkung in (1.1) und Schubert [1], Kapitel 3), so legt

bspw. jeder Funktor $C \longrightarrow$ cat ein Kategoriensystem $\underline{K}$ mit $\eta_S = 1$, $\eta_{\varphi',\varphi} = id$ fest. Diese Systeme spielen i.f. jedoch keine Rolle. Von Interesse sind vielmehr jene Kategoriensysteme, die wir in 2. und 3. abstrakt einführen und im weiteren Verlauf der Untersuchungen mehrfach konkretisieren. Auf die Angabe nicht-trivialer Beispiele können wir deshalb an dieser Stelle verzichten.

(1.6) Definition

Seien $\underline{K} = (K(S), F_\varphi, \eta_S, \eta_{\varphi',\varphi})$ und $\underline{K}^* = (K^*(S), F^*_\varphi, \eta^*_S, \eta^*_{\varphi',\varphi})$ Kategoriensysteme über C und sei $\Phi = (\Phi_S)_{S \in |C|}$ eine Familie von Funktoren

$$\Phi_S : K(S) \longrightarrow K^*(S).$$

Wir nennen Φ einen Morphismus $\underline{K} \longrightarrow \underline{K}^*$, wenn folgende Diagramme kommutativ sind:

(1)
$$\begin{array}{ccc} K(S) & \xrightarrow{\Phi_S} & K^*(S) \\ {\scriptstyle F_\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^*_\varphi} \\ K(S') & \xrightarrow[\Phi_{S'}]{} & K^*(S') \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ccc} \Phi_S \circ F_{id_S} & \overset{(1)}{=} & F^*_{id_S} \circ \Phi_S \\ {\scriptstyle \Phi_S \circ \eta_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta^*_S \circ \Phi_S} \\ \Phi_S \circ Id_{K(S)} & = & Id_{K^*(S)} \circ \Phi_S \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{ccccc} \Phi_{S''} \circ F_{\varphi'} \circ F_\varphi & \overset{(1)}{=} & F^*_{\varphi'} \circ \Phi_{S'} \circ F_\varphi & \overset{(1)}{=} & F^*_{\varphi'} \circ F^*_\varphi \circ \Phi_S \\ {\scriptstyle \Phi_{S''} \circ \eta_{\varphi',\varphi}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \eta^*_{\varphi',\varphi} \circ \Phi_S} \\ \Phi_{S''} \circ F_{\varphi' \circ \varphi} & & \overset{(1)}{=} & & F^*_{\varphi' \circ \varphi} \circ \Phi_S \end{array}$$

Geben wir $\underline{K}$ und $\underline{K}^*$ mittels Funktoren $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*: C \longrightarrow$ cat vor (vgl. (1.5)), so ist ein Morphismus $\underline{K} \longrightarrow \underline{K}^*$ offensichtlich eine natürliche Transformation $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^*$.

Zur Untersuchung funktorieller Operationen auf Kategoriensystemen und deren Morphismen führen wir folgende Konstruktion durch:

(1.7)Satz Sei $\underline{K} = (K(S), F_\varphi, \eta_S, \eta_{\varphi',\varphi})$ ein Kategoriensystem über C.

Durch die Festlegungen (1), (2) und (3) wird eine Kategorie $\mathrm{Ass}\underline{K}$ -die mit $\underline{K}$ assoziierte Kategorie - definiert:

(1) $|\mathrm{Ass}\underline{K}| := \dot{\bigcup}_{S\in|C|} |K(S)|$

(wir sehen $|K(S)|$ als Teilmenge von $|\mathrm{Ass}\underline{K}|$ an)

(2)für $\Delta \in |K(S)|$, $\Delta' \in |K(S')|$ sei

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}\underline{K}}(\Delta, \Delta') := \{(\varphi,\delta') \mid \varphi\in\mathrm{Hom}_C(S,S'),\ \delta'\in\mathrm{Hom}_{K(S')}(F_\varphi(\Delta), \Delta')\}$$

(3)für $\Delta \in |K(S)|$, $\Delta' \in |K(S')|$, $\Delta'' \in |K(S'')|$ und $(\varphi,\delta')\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}\underline{K}}(\Delta, \Delta')$, $(\varphi',\delta'')\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}\underline{K}}(\Delta',\Delta'')$ sei

$$(\varphi',\delta'')\circ(\varphi,\delta') := (\varphi'\circ\varphi, \delta''\circ F_{\varphi'}(\delta')\circ\eta_{\varphi',\varphi,\Delta}) .$$

Die $\mathrm{Ass}\underline{K}$ - Identität von $\Delta\in|K(S)|$ wird durch

(4) $\underline{id}_\Delta := (id_S, (\eta_{S,\Delta})^{-1})$

gegeben.

Beweis:

Offensichtlich gilt $\underline{id}_\Delta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}\underline{K}}(\Delta,\Delta)$ und $(\varphi',\delta'')\circ(\varphi,\delta')\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}\underline{K}}(\Delta,\Delta'')$, so daß die Gleichungen

(i) $(\varphi,\delta')\circ\underline{id}_\Delta = (\varphi,\delta')$

(ii) $\underline{id}_{\Delta'}\circ(\varphi,\delta') = (\varphi,\delta')$

(iii) $((\varphi'',\delta)\circ(\varphi',\delta''))\circ(\varphi,\delta) = (\varphi'',\delta)\circ((\varphi',\delta'')\circ(\varphi,\delta'))$

nachzuweisen bleiben. Im Fall (i) hat man

$$\begin{aligned}(\varphi,\delta')\circ\underline{id}_\Delta &= (\varphi,\delta')\circ(id_S,(\eta_{S,\Delta})^{-1})\\ &= (\varphi,\delta'\circ F_\varphi((\eta_{S,\Delta})^{-1})\circ\eta_{\varphi,id_S,\Delta})\\ &= (\varphi,\delta'\circ(F_\varphi\circ\eta_S)^{-1}_\Delta\circ\eta_{\varphi,id_S,\Delta})\\ &= (\varphi,\delta')\end{aligned}$$

aufgrund der Kommutativität des Diagramms (1.4.5.). Analog folgt (ii) aus (1.4.6):

$$\begin{aligned}\underline{id}_{\Delta'}\circ(\varphi,\delta') &= (id_{S'},(\eta_{S',\Delta'})^{-1})\circ(\varphi,\delta')\\ &= (\varphi,(\eta_{S',\Delta'})^{-1}\circ F_{id_{S'}}(\delta')\circ\eta_{id_{S'},\varphi,\Delta})\\ &= (\varphi,\delta'\circ(\eta_{S',F_\varphi(\Delta)})^{-1}\circ\eta_{id_{S'},\varphi,\Delta})\\ &= (\varphi,\delta').\end{aligned}$$

Die folgenden Umformungen beweisen (iii) ((×) = Kommutativität des Diagramms (1.4.7)):

$$
\begin{aligned}
&((\varphi'', \delta)\circ(\varphi', \delta''))\circ(\varphi, \delta') \\
&\quad = (\varphi''\circ\varphi', \delta\circ F_{\varphi'}(\delta'')\circ\eta_{\varphi'', \varphi', \Delta'})\circ(\varphi, \delta') \\
&\quad = (\varphi''\circ\varphi'\circ\varphi, \delta\circ F_{\varphi'}(\delta'')\circ\eta_{\varphi'', \varphi', \Delta'}\circ F_{\varphi''\circ\varphi'}(\delta')\circ \\
&\qquad\qquad \circ\eta_{\varphi''\circ\varphi', \varphi, \Delta}) \\
&\quad = (\varphi''\circ\varphi'\circ\varphi, \delta\circ F_{\varphi'}(\delta'')\circ\langle F_{\varphi'}\circ F_{\varphi}(\delta')\rangle\circ\eta_{\varphi'', \varphi', F_{\varphi}(\Delta)}\circ \\
&\qquad\qquad \circ\eta_{\varphi''\circ\varphi', \varphi, \Delta}) \\
&\quad \overset{(\times)}{=} (\varphi''\circ\varphi'\circ\varphi, \delta\circ F_{\varphi'}(\delta'')\circ F_{\varphi'}(F_{\varphi}(\delta'))\circ F_{\varphi'}(\eta_{\varphi', \varphi, \Delta})\circ \\
&\qquad\qquad \circ\eta_{\varphi'', \varphi'\circ\varphi, \Delta}) \\
&\quad = (\varphi''\circ\varphi'\circ\varphi, \delta\circ F_{\varphi'}(\delta''\circ F_{\varphi}(\delta')\circ\eta_{\varphi', \varphi, \Delta})\circ\eta_{\varphi'', \varphi'\circ\varphi, \Delta}) \\
&\quad = (\varphi'', \delta)\circ(\varphi'\circ\varphi, \delta''\circ F_{\varphi}(\delta')\circ\eta_{\varphi', \varphi, \Delta}) \\
&\quad = (\varphi'', \delta)\circ((\varphi', \delta'')\circ(\varphi, \delta')).
\end{aligned}
$$

Mittels der assoziierten Kategorien erhalten wir folgende Charakterisierung der Morphismen von Kategoriensystemen:

(1.8) Lemma: Seien $\underline{K}$, $\underline{K}^*$ Kategoriensysteme über C und sei $\Phi = (\Phi_S)$ eine Familie von Funktoren $\Phi_S: K(S) \to K^*(S)$. Wir setzen

$$\underline{\Phi}(\Delta) := \Phi_S(\Delta)$$

$$\underline{\Phi}(\varphi, \delta') := (\varphi, \Phi_{S'}(\delta')) .$$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $\Phi: \underline{K} \longrightarrow \underline{K}^*$ ist ein Morphismus.

(2) $\underline{\Phi}: \mathrm{Ass}\underline{K} \to \mathrm{Ass}\underline{K}^*$ ist ein Funktor.

Beweis:

Man verifiziert leicht die folgenden Äquivalenzen:

(i) $[\,(\varphi, \delta') \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}\underline{K}}(\Delta, \Delta') \Longrightarrow \underline{\Phi}(\varphi, \delta') \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}\underline{K}^*}(\underline{\Phi}(\Delta), \underline{\Phi}(\Delta'))$

$\Longleftrightarrow$ (1.6.1) ist kommutativ

(ii) $\underline{\Phi}(\underline{\mathrm{id}}_{\Delta}) = \underline{\mathrm{id}}_{\underline{\Phi}(\Delta)}$ $\Longleftrightarrow$ (1.6.2) ist kommutativ

(iii) $\underline{\Phi}((\varphi', \delta'')\circ(\varphi, \delta')) = \underline{\Phi}(\varphi', \delta'')\circ\underline{\Phi}(\varphi, \delta')$ $\Longleftrightarrow$ (1.6.3) ist kommutativ.

Aus (i), (ii) und (iii) folgt offensichtlich die Behauptung.

(1.9) Die Bezeichnung $\underline{\Phi}$ für den durch $\Phi : \underline{K} \to \underline{K}^*$ induzierten Funktor $\mathrm{Ass}\underline{K} \to \mathrm{Ass}\underline{K}^*$ behalten wir i.f. bei. Bemerkt sei, daß K(S) vermöge des durch

$$I_S(\Delta) := \Delta$$
$$I_S(\delta) := (\mathrm{id}_S, \delta \circ (\eta_{S,\Delta})^{-1})$$

definierten Inklusionsfunktors $I_S : K(S) \to \mathrm{Ass}\underline{K}$ als Unterkategorie von $\mathrm{Ass}\underline{K}$ angesehen werden kann und daß der Übergang $\Phi \rightsquigarrow \underline{\Phi}$ aufgrund der leicht zu verifizierenden Beziehung

$$\underline{\Phi} \circ I_S = I_S^* \circ \Phi_S$$

mit der Zuordnung $\underline{K} \rightsquigarrow \mathrm{Ass}\underline{K}$ vertauschbar ist.

(1.10) Sei $\Phi : \underline{K} \to \underline{K}^*$ ein Morphismus von Kategoriensystemen und $G : \mathrm{Ass}\underline{K}^* \to \mathrm{Ens}$ ein Funktor. Wir konstruieren wie folgt ein Kategoriensystem $\check{\underline{K}}$:

(1) **Lemma:**
Durch $|\check{K}(S)| := \{(\Delta,\xi) \mid \Delta \in |K(S)|, \xi \in G \circ \underline{\Phi}(\Delta)\}$
$\mathrm{Hom}_{\check{K}(S)}((\Delta,\xi),(\tilde{\Delta},\tilde{\xi})) :=$
$\{\delta \in \mathrm{Hom}_{K(S)}(\Delta,\tilde{\Delta}) \mid G \circ \underline{\Phi} \circ I_S(\delta)(\xi) = \tilde{\xi}\}$
wird eine Kategorie K(S) definiert.

Beweis:
$G \circ \underline{\Phi} \circ I_S : K(S) \to \mathrm{Ens}$ ist ein Funktor!

(2) **Lemma:**
Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$. Durch folgende Zuordnungen wird ein Funktor $\check{F}_\varphi : \check{K}(S) \to \check{K}(S')$ festgelegt:

$$\check{F}_\varphi(\Delta,\xi) := (F_\varphi(\Delta), G \circ \underline{\Phi}(\varphi, \mathrm{id}_{F_\varphi(\Delta)})(\xi)) \quad ((\Delta,\xi) \in |\check{K}(S)|)$$

$$\check{F}_\varphi(\delta) := F_\varphi(\delta) \quad (\delta \in \mathrm{Hom}_{\check{K}(S)}((\Delta,\xi),(\tilde{\Delta},\tilde{\xi}))).$$

Beweis:
Wegen $(\varphi, \mathrm{id}_{F_\varphi(\Delta)}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}\underline{K}}(\Delta, F_\varphi(\Delta))$ gilt $\check{F}_\varphi(\Delta,\xi) \in |\check{K}(S')|$, sodaß nur

$$[G \circ \underline{\Phi} \circ I_{S'}(F_\varphi(\delta))] \circ [G \circ \underline{\Phi}(\varphi, \mathrm{id}_{F_\varphi(\Delta)})](\xi)$$
$$= G \circ \underline{\Phi}(\varphi, \mathrm{id}_{F_\varphi(\tilde{\Delta})})(\tilde{\xi})$$

nachzuweisen ist. Nach Voraussetzung gilt $\tilde{\xi} = G \circ \underline{\Phi} \circ I_S(\delta)(\xi)$; also folgt die Behauptung gewiß dann, wenn die Gleichheit der $\mathrm{Ass}\underline{K}$-Morphismen

(i) $I_{S'}(F_\varphi(\delta)) \circ (\varphi, \mathrm{id}_{F_\varphi(\Delta)})$

(ii) $(\varphi, \mathrm{id}_{F_\varphi(\tilde{\Delta})}) \circ I_S(\delta)$

nachgewiesen wird. Man rechnet leicht nach, daß sowohl (i) als auch (ii) mit $(\varphi, F_\varphi(\delta))$ identisch ist.

(3) Lemma:

Sei $\check{\eta}_{S,(\Delta,\xi)} := \eta_{S,\Delta}$. Dann ist $\check{\eta}_S\colon \mathrm{Id}_{\check{K}(S)} \to \check{F}_{\mathrm{id}_S}$ eine natürliche Transformation.

Beweis:

Offenbar reicht es, $\eta_{S,\Delta} \in \mathrm{Hom}_{\check{K}(S)}((\Delta,\xi),(F_{\mathrm{id}_S}(\Delta), G\circ\underline{\Phi}(\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_{F_{\mathrm{id}_S}(\Delta)})(\xi))$, also

(i) $G\circ\underline{\Phi}\circ I_S(\eta_{S,\Delta})(\xi) = G\circ\underline{\Phi}(\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_{F_{\mathrm{id}_S}(\Delta)})(\xi)$

zu verifizieren. Nun gilt

$$I_S(\eta_{S,\Delta}) = (\mathrm{id}_S, \eta_{S,\Delta} \circ (\eta_{S,\Delta})^{-1}) = (\mathrm{id}_S, \mathrm{id}_{F_{\mathrm{id}_S}(\Delta)}),$$

dies impliziert (i).

(4) Lemma:

Für jede C-Sequenz $S \xrightarrow{\varphi} S' \xrightarrow{\varphi'} S''$ wird durch

$$\check{\eta}_{\varphi',\varphi,(\Delta,\xi)} := \eta_{\varphi',\varphi,\Delta}$$

ein natürlicher Isomorphismus $\check{\eta}_{\varphi',\varphi} : \check{F}_{\varphi'\circ\varphi} \longrightarrow \check{F}_{\varphi'}\circ\check{F}_{\varphi}$ definiert.

Beweis:

Es ist wiederum nur $\eta_{\varphi',\varphi,\Delta} \in \mathrm{Hom}_{\check{K}(S'')}(\check{F}_{\varphi'\circ\varphi}(\Delta,\xi), \check{F}_{\varphi'}\circ\check{F}_{\varphi}(\Delta,\xi))$ zu zeigen. Wegen

$$\check{F}_{\varphi'\circ\varphi}(\Delta,\xi) = (F_{\varphi'\circ\varphi}(\Delta), G\circ\underline{\Phi}(\varphi'\circ\varphi, \mathrm{id}_{F_{\varphi'\circ\varphi}(\Delta)})(\xi))$$

und

$$\check{F}_{\varphi'}\circ\check{F}_{\varphi}(\Delta,\xi) = (F_{\varphi'}\circ F_{\varphi}(\Delta), [\, G\circ\underline{\Phi}(\varphi', \mathrm{id}_{F_{\varphi'}\circ F_{\varphi}(\Delta)})]\circ$$

$$\circ\, [\, G\circ\underline{\Phi}(\varphi, \mathrm{id}_{F_{\varphi}(\Delta)})](\xi))$$

folgt die Behauptung gewiß dann, wenn wir die Identität der $\mathrm{Ass}\underline{K}$ - Morphismen

(i) $I_{S''}(\eta_{\varphi',\varphi,\Delta})\circ(\varphi'\circ\varphi, \mathrm{id}_{F_{\varphi'\circ\varphi}(\Delta)})$

(ii) $(\varphi', \mathrm{id}_{F_{\varphi}\circ F_{\varphi}(\Delta)})\circ(\varphi, \mathrm{id}_{F_{\varphi}(\Delta)})$

nachweisen. Nun stimmen - wie man leicht nachrechnet - (i) und (ii) mit $(\varphi'\circ\varphi, \eta_{\varphi',\varphi,\Delta})$ überein, womit (4) gezeigt ist.

(5) Offensichtlich kommutieren für $\check{\underline{K}} := (\check{K}(S), \check{F}_\varphi, \check{\eta}_S, \check{\eta}_{\varphi',\varphi})$ die in (1.5) angesprochenen Diagramme, da das Entsprechende für $\underline{K}$ nach Voraussetzung gilt. Folglich ist $\check{\underline{K}}$ ein Kategoriensystem über C; wir nennen es die (Φ,G) - Erweiterung von $\underline{K}$. Der 'Umweg' über $\underline{K}^*$ ist bei der Einführung von Erweiterungen von $\underline{K}$ überflüssig: es reichte aus, $\underline{K}$ mittels Funktoren $\mathrm{Ass}\underline{K} \to$ Ens zu erweitern und dies speziell auf $G\circ\Phi$ anzuwenden. Es wurde dennoch obige Darstellung gewählt, da später stets die Situation '$\Phi: \underline{K} \to \underline{K}^*$, G: $\mathrm{Ass}\underline{K}^* \to$ Ens ' vorliegt.
Wir führen noch folgende Begriffe ein:

(1.11) Seien $\underline{K}$, $\underline{K}'$ Kategoriensysteme über C. $\underline{K}'$ heißt ein Unterkategoriensystem von $\underline{K}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) $K'(S)$ ist Unterkategorie von $K(S)$
(2) $F'_\varphi = F_\varphi | K(S)$
(3) $\eta'_{S,\Delta} = \eta_{S,\Delta}$ $\quad (\Delta \in |K'(S)|)$
(4) $\eta'_{\varphi',\varphi,\Delta} = \eta_{\varphi',\varphi,\Delta}$ $\quad (\Delta \in |K'(S)|)$.
Ein Unterkategoriensystem von $\underline{K}$ ist somit durch eine Familie $(K'(S))_{S\in|C|}$ von Unterkategorien $K'(S) \subset K(S)$ mit $F_\varphi(K'(S)) \subset K'(S')$ festgelegt. Erfüllt $(K'(S))_{S\in|C|}$ die letztgenannte Bedingung, so schreiben wir kurz $(K'(S), F_\varphi, \eta_S, \eta_{\varphi',\varphi})$ für das zugehörige Unterkategoriensystem von $\underline{K}$, führen also keine neue Bezeichnung fur die jeweiligen Einschränkungen der Operationen F_φ, η_S, $\eta_{\varphi',\varphi}$ ein.

(1.12) Sei $\underline{K}$ ein Kategoriensystem über C. Wir legen mittels $\underline{K}$ wie folgt einen Funktor $D: C \longrightarrow$ Ens fest:
(1) für $S\in|C|$ sei

$$D(S) := |K(S)|/\sim$$

die Menge der Äquivalenzklassen der durch

$$\Delta \sim \tilde{\Delta} :\Longleftrightarrow \exists \text{ Isomorphismus } \delta: \Delta \xrightarrow{\sim} \tilde{\Delta}$$

auf $|K(S)|$ definierten Äquivalenzrelation; (Die Klasse eines Objekts Δ bezeichnen wir mit $[\Delta]$.)
(2) für $\varphi\in\mathrm{Hom}_C(S,S')$ sei $D(\varphi)$: $D(S) \longrightarrow D(S')$ die durch

$$D(\varphi)([\Delta]) := [F_\varphi(\Delta)]$$

offensichtlich wohldefinierte Abbildung.

Die Isomorphismen $\eta_{S,\Delta}$ und $\eta_{\varphi',\varphi,\Delta}$ liefern die Beziehungen $[F_{id_S}(\Delta)] = [\Delta]$ und $[F_{\varphi'\circ\varphi}(\Delta)] = [F_{\varphi'}\circ F_{\varphi}(\Delta)]$ und somit die Funktoreigenschaft für D. Wir nennen D den Isomorphieklassenfunktor des Systems $\underline{K}$.

2. Basiswechsel

(2.1)**Definition**

Sei K eine Kategorie und $proj_{K,i}: K\times K \longrightarrow K$ die i-te Projektion. Ferner seien $\otimes: K\times K \longrightarrow K$ ein Funktor und

$$\gamma^i : proj_{K,i} \longrightarrow \otimes \quad (i=1,2)$$

natürliche Transformationen. $(\otimes,\gamma^1,\gamma^2)$ heißt Tensorprodukt in K, wenn die durch

$$\varphi \longmapsto (\varphi\circ\gamma^1_{A_1,A_2} \ , \ \varphi\circ\gamma^2_{A_1,A_2})$$

definierte Abbildung

$Hom_K(A_1\otimes A_2,B) \longrightarrow Hom_K(A_1,B) \times Hom_K(A_2,B)$

für jedes Tripel (A_1,A_2,B) von K-Objekten bijektiv ist.

Ein Tensorprodukt in K ist in einem leicht zu präsisierenden Sinn bis auf natürliche Isomorphie eindeutig bestimmt.

(2.2)**Definition**

Seien K eine Kategorie, $A_1,A_2\in|K|$ und $\varphi_1,\varphi_2\in Hom_K(A_1,A_2)$. Ein Differenzcokern (B,ε) von φ_1 und φ_2 ist ein K-Morphismus $\varepsilon: A_2 \longrightarrow B$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\varepsilon\circ\varphi_1 = \varepsilon\circ\varphi_2$

(2) $\forall\,\tilde{\varepsilon}: A_2 \longrightarrow \tilde{B}$ mit $\tilde{\varepsilon}\circ\varphi_1 = \tilde{\varepsilon}\circ\varphi_2 \quad \exists!\ \chi: B \longrightarrow \tilde{B}$ mit $\tilde{\varepsilon} = \chi\circ\varepsilon$.

Differenzcokerne sind bis auf einen nachgeschalteten Isomorphismus eindeutig bestimmt.
Schließlich benötigen wir:

(2.3)Sei K eine Kategorie und $A\in|K|$. Mit K<A> bezeichnen wir die Kategorie der Objekte nach A:

$$|K\langle A\rangle| := \{B_\varphi \mid B\in|K|, \varphi\in \mathrm{Hom}_K(A,B)\}$$

$$\mathrm{Hom}_{K\langle A\rangle}(B_\varphi, \tilde{B}_{\tilde{\varphi}}) := \{\chi\in\mathrm{Hom}_K(B,\tilde{B}) \mid \chi\circ\varphi = \tilde{\varphi}\}.$$

Kategorien der Form $K\langle A\rangle\langle A'_\varphi,\rangle$ können wir mit $K\langle A'\rangle$ identifizieren, denn

$$B_\psi \longmapsto (B_{\psi\circ\varphi},)_\psi \ , \quad \chi\longmapsto\chi$$

definiert einen Isomorphismus $K\langle A'\rangle \longrightarrow K\langle A\rangle\langle A'_\varphi,\rangle$. Aus diesem Grund werden wir i.f. Objekte der Kategorie $K\langle A\rangle\langle A'_\varphi,\rangle$ durch B_ψ mit $B\in|K|$ und $\psi\in\mathrm{Hom}(A',B)$ vorgeben.

(2.4) Sei $\tilde{C}$ eine Kategorie mit folgenden Eigenschaften:
(1) $\tilde{C}$ besitzt ein Tensorprodukt $(\otimes, \gamma^1, \gamma^2)$,
(2) in $\tilde{C}$ existieren generell Differenzcokerne.
$\tilde{R}$ sei ein fest gewähltes $\tilde{C}$-Objekt und $C := \tilde{C}\langle\tilde{R}\rangle$ die Kategorie der Objekte nach $\tilde{R}$. Wir schreiben $S = \tilde{S}_\sigma$, $S' = \tilde{S}'_{\sigma'}$, etc. für C-Objekte und $T = \tilde{T}_\theta$ bzw. T' für $C\langle S\rangle$- bzw. $C\langle S'\rangle$ - Objekte.

(1) Lemma
=====
$C\langle S\rangle$ besitzt ein Tensorprodukt $(\underset{S}{\otimes}, \gamma^{S,1}, \gamma^{S,2})$.

Seien $T_1, T_2\in|C\langle S\rangle|$ gegeben. Wir bilden den Differenzcokern $(\tilde{T}_{12}, \varepsilon)$ der Morphismen $\gamma^i_{\tilde{T}_1,\tilde{T}_2}\circ\theta_i \in \mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\tilde{S}, \tilde{T}_1\otimes\tilde{T}_2)$ und setzen

$$T_1 \underset{S}{\otimes} T_2 := (\tilde{T}_{12}, \varepsilon\circ\gamma^1_{\tilde{T}_1,\tilde{T}_2}\circ\theta_1)$$

$$\gamma^{S,i}_{T_1,T_2} := \varepsilon\circ\gamma^i_{\tilde{T}_1,\tilde{T}_2} \ , \quad i=1,2.$$

Dann gilt $T_1 \underset{S}{\otimes} T_2 \in |C\langle S\rangle|$, und aus (2.2.1) folgt sofort

$$\gamma^{S,i}_{T_1,T_2} \in \mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(T_i, T_1 \underset{S}{\otimes} T_2) \ , \quad i=1,2.$$

Wir weisen die universelle Abbildungseigenschaft für $\underset{S}{\otimes}$ nach:
Seien $T\in|C\langle S\rangle|$ und $(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(T_1,T)\times\mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(T_2,T)$ gegeben. Zum Paar $(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\tilde{T}_1,\tilde{T})\times\mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\tilde{T}_2,\tilde{T})$ der zugrundeliegenden $\tilde{C}$-Morphismen existiert genau ein $\tilde{\varphi}\in\mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\tilde{T}_1\otimes\tilde{T}_2,\tilde{T})$ mit

$$\tilde{\varphi}\circ\gamma^i_{\tilde{T}_1,\tilde{T}_2} = \varphi_i \ , \quad i=1,2.$$

Es folgt

$$\tilde{\varphi}\circ\gamma^1_{\tilde{T}_1,\tilde{T}_2}\circ\theta_1 = \varphi_1\circ\theta_1 = \theta = \varphi_2\circ\theta_2 = \tilde{\varphi}\circ\gamma^2_{\tilde{T}_1,\tilde{T}_2}\circ\theta_2 \ ,$$

also existiert nach (2.2.2) genau ein $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\tilde{T}_{12},\tilde{T})$ mit $\tilde{\varphi} = \varphi\circ\varepsilon$. Offensichtlich ergibt sich hieraus $\varphi\in\mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(T_1\underset{S}{\otimes}T_2, T)$

und $\varphi \circ \gamma^{S,i}_{T_1,T_2} = \varphi_i$, i=1,2. Darüber hinaus ist φ durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt.

Auf bekanntem Weg erklärt man nun $\underset{S}{\otimes}$ für Morphismen so, daß die Familien $\gamma^{S,i} := (\gamma^{S,i}_{T_1,T_2})_{(T_1,T_2)\in|C\langle S\rangle|\times|C\langle S\rangle|}$ natürliche Transformationen $proj_{C\langle S\rangle,i} \longrightarrow \underset{S}{\otimes}$ werden, i=1,2.

(2) Sei $\varphi\in Hom_C(S,S')$. Die Aussage (1) gibt Anlaß zur Festlegung eines Funktors $\otimes_\varphi$: $C\langle S\rangle \longrightarrow C\langle S'\rangle$:

Für $T\in|C\langle S\rangle|$ bzw. $\psi\in Hom_{C\langle S\rangle}(T_1,T_2)$ sei

$$\otimes_\varphi(T) := \widetilde{(T \underset{S}{\otimes} \bar{S}'_\varphi)}_{\theta_\varphi} \quad \text{mit } \theta_\varphi := \gamma^{S,2}_{T,\bar{S}'_\varphi}$$

bzw. $\otimes_\varphi(\psi) := \psi \underset{S}{\otimes} id_{\bar{S}'_\varphi}$.

Als elementare Folgerungen aus der universellen Abbildungseigenschaft des Tensorprodukts erhält man die Aussagen (3) und (4):

(3) $\beta_{S,T} := \gamma^{S,1}_{T,\bar{S}_{id_S}} : T \longrightarrow \otimes_{id_S}(T)$ ist ein Isomorphismus.

(4) Seien die C-Sequenz $S \xrightarrow{\varphi} S' \xrightarrow{\varphi'} S''$ und das $C\langle S\rangle$-Objekt T gegeben. Es existiert genau ein Isomorphismus

$$\beta_{\varphi',\varphi,T}: \otimes_{\varphi'\circ\varphi}(T) \longrightarrow \otimes_{\varphi'}\circ\otimes_\varphi(T)$$

mit $\beta_{\varphi',\varphi,T}\circ\gamma^{S,1}_{T,\bar{S}'_{\varphi'\circ\varphi}} = \gamma^{S',1}_{\otimes_\varphi(T),\bar{S}'_{\varphi'}}\circ\gamma^{S,1}_{T,\bar{S}'_\varphi}$.

Wegen (3) ist $\beta_S := (\beta_{S,T})_{T\in|C\langle S\rangle|}: Id_{C\langle S\rangle} \longrightarrow \otimes_{id_S}$ trivialerweise ein natürlicher Isomorphismus. Aus (4) folgert man, daß auch $\beta_{\varphi',\varphi} := (\beta_{\varphi',\varphi,T})_{T\in|C\langle S\rangle|}: \otimes_{\varphi'\circ\varphi} \longrightarrow \otimes_{\varphi'}\circ\otimes_\varphi$ ein natürlicher Isomorphismus ist und daß $(C\langle S\rangle,\otimes_\varphi,\beta_S,\beta_{\varphi',\varphi})$ die Kommutativitätsbedingungen (1.4.5) - (1.4.7) erfüllt. Wir führen den Beweis der ersten Aussage durch, in den weiteren Fällen verfährt man analog.

$\beta_{\varphi',\varphi}$ ist dann ein natürlicher Isomorphismus, wenn für jedes $\psi\in Hom_{C\langle S\rangle}(T_1,T_2)$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \otimes_{\varphi'\circ\varphi}(T_1) & \xrightarrow{\beta_{\varphi',\varphi,T_1}} & \otimes_{\varphi'}\circ\otimes_{\varphi}(T_1) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \otimes_{\varphi'\circ\varphi}(\psi)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \otimes_{\varphi'}\circ\otimes_{\varphi}(\psi)} \\ \otimes_{\varphi'\circ\varphi}(T_2) & \xrightarrow[\beta_{\varphi',\varphi,T_2}]{} & \otimes_{\varphi'}\circ\otimes_{\varphi}(T_2) \end{array}$$

kommutativ ist. Zum Nachweis reicht es offensichtlich,

$$[\otimes_{\varphi'}\circ\otimes_{\varphi}(\psi)]\circ\beta_{\varphi',\varphi,T_1}\circ\gamma^{S,1}_{T_1,\mathfrak{S}'_{\varphi}!_{\circ\varphi}}$$

$$=\beta_{\varphi',\varphi,T_2}\,[\otimes_{\varphi'\circ\varphi}(\psi)]\circ\gamma^{S,1}_{T_1,\mathfrak{S}'_{\varphi}!_{\circ\varphi}}$$

zu verifizieren, denn die Beziehung

$$[\otimes_{\varphi'}\circ\otimes_{\varphi}(\psi)]\circ\beta_{\varphi',\varphi,T_1}\circ\gamma^{S,2}_{T_1,\mathfrak{S}'_{\varphi}!_{\circ\varphi}}$$

$$=\beta_{\varphi',\varphi,T_2}\circ[\otimes_{\varphi'\circ\varphi}(\psi)]\circ\gamma^{S,2}_{T_1,\mathfrak{S}'_{\varphi}!_{\circ\varphi}}$$

folgt unmittelbar aus (4). Es gilt

$$\begin{aligned}
&[\otimes_{\varphi'}\circ\otimes_{\varphi}(\psi)]\circ\beta_{\varphi',\varphi,T_1}\circ\gamma^{S,1}_{T_1,\mathfrak{S}'_{\varphi}!_{\circ\varphi}}\\
&\overset{(4)}{=}[\otimes_{\varphi}(\psi)\underset{S'}{\otimes}\mathrm{id}]\circ\gamma^{S',1}_{\otimes_{\varphi}(T_1),\mathfrak{S}'_{\varphi}!}\circ\gamma^{S,1}_{T_1,\mathfrak{S}'_{\varphi}}\\
&=\gamma^{S',1}_{\otimes_{\varphi}(T_2),\mathfrak{S}'_{\varphi}!}\circ[\psi\underset{S}{\otimes}\mathrm{id}]\circ\gamma^{S,1}_{T_1,\mathfrak{S}'_{\varphi}}\\
&=\gamma^{S',1}_{\otimes_{\varphi}(T_2),\mathfrak{S}'_{\varphi}!}\circ\gamma^{S,1}_{T_2,\mathfrak{S}'_{\varphi}}\circ\psi\\
&\overset{(4)}{=}\beta_{\varphi',\varphi,T_2}\circ\gamma^{S,1}_{T_2,\mathfrak{S}'_{\varphi}!_{\circ\varphi}}\circ\psi\\
&=\beta_{\varphi',\varphi,T_2}\circ[\otimes_{\varphi'\circ\varphi}(\psi)]\circ\gamma^{S,1}_{T,\mathfrak{S}'_{\varphi}!_{\circ\varphi}}\quad,\ \text{w.z.b.w..}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir:

(2.5) Satz Sei $\bar{C}$ eine Kategorie mit Tensorprodukt und Differenzcokernen, $\bar{R} \in |\bar{C}|$ und $C := \bar{C}\langle\bar{R}\rangle$. Das in (2.4) angegebene Quadrupel $\underline{B} := (C\langle S\rangle, \otimes_{\varphi}, \beta_S, \beta_{\varphi',\varphi})$ ist ein Kategoriensystem über C.

Wir nennen $\underline{B}$ den Basiswechsel über C.

(2.6)Lemma Seien $T \in |C\langle S\rangle|$, $T' \in |C\langle S'\rangle|$ und $(\varphi,\Psi') \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}\underline{B}}(T,T')$.
===== Wir setzen

$$\Pi_o(T) := \tilde{T}_{\Theta \circ \delta},$$

$$\Pi_o(\varphi,\Psi') := \Psi' \circ \gamma^{S,1}_{T,S'_\varphi}.$$

Dann gilt:

(1) Π_o: $\mathrm{Ass}\underline{B} \longrightarrow C$ ist ein Funktor.

(2) Sei J_S: $C\langle S\rangle \longrightarrow \mathrm{Ass}\underline{B}$ der Inklusionsfunktor (vgl.(1.9)); es gilt

$$\Pi_o \circ J_S(\Psi) = \Psi \quad \forall\ \Psi \in \mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(T_1,T_2).$$

(3) $\gamma^{S,1}_{T,S'_\varphi} \in \mathrm{Hom}_C(\Pi_o(T),\Pi_o \circ \otimes_\varphi(T))$.

Der Beweis ist sehr einfach, so daß wir auf eine Durchführung verzichten können.

3. Systeme von Funktorkategorien

(3.1)Seien $\tilde{C}$, C und $\underline{B}$ wie in 2., darüber hinaus sei $\underline{B}_o = (C_o\langle S\rangle, \otimes_\varphi, \beta_S, \beta_{\varphi'}, {}_{,\varphi})$ ein fest gewähltes Unterkategoriensystem von $\underline{B}$ (vgl. (1.11)). Ist K eine weitere Kategorie, so können wir wie folgt ein Kategoriensystem $\underline{K} = (K(S), F_\varphi, \eta_S, \eta_{\varphi'}, {}_{,\varphi})$ festlegen:

(1) Für $S \in |C|$ sei $K(S) := [K, C_o\langle S\rangle]$ die Kategorie der Funktoren $K \to C_o\langle S\rangle$ (vgl.(1.2)).

(2) Für $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ definieren wir F_φ: $K(S) \longrightarrow K(S')$ durch

$$F_\varphi(\Delta) := \otimes_\varphi \circ \Delta$$

$$F_\varphi(\delta) := \otimes_\varphi \circ \delta$$

Dann liegt in der Tat ein Funktor vor: trivialerweise gilt $F_\varphi(\mathrm{id}_\Delta) = \mathrm{id}_{F_\varphi(\Delta)}$, ferner nach (1.3.1) $F_\varphi(\delta_2 \circ \delta_1) = \otimes_\varphi \circ (\delta_2 \circ \delta_1) = {}^\varphi(\otimes_\varphi \circ \delta_2) \circ (\otimes_\varphi \circ \delta_1) = F_\varphi(\delta_2) \circ F_\varphi(\delta_1)$.

(3) Da β_S: $\mathrm{Id}_{C\langle S\rangle} \to \otimes_{\mathrm{id}_S}$ ein natürlicher Isomorphismus ist, wird durch

$$\eta_{S,\Delta} := \beta_S \circ \Delta : \Delta \to F_{\mathrm{id}_S}(\Delta)$$

für jedes $\Delta \in |K(S)|$ ein Isomorphismus definiert. Unter Beachtung von

$$F_{id_S}(\delta)\circ\eta_{S,\Delta_1} = (\varepsilon_{id_S}\circ\delta)\circ(\beta_S\circ\Delta_1)$$

$$\overset{(1.3.2)}{=} (\beta_S\circ\Delta_2)\circ(Id_{C_o\langle S\rangle}\circ\delta)$$

$$= \eta_{S,\Delta_2}\circ Id_{K(S)}(\delta)$$

ist $\eta_S := (\eta_{S,\Delta})_{\Delta\in|K(S)|}$ ein natürlicher Isomorphismus $Id_{K(S)}\longrightarrow F_{id_S}$.

(4)Analog (3) erhalten wir mittels $\beta_{\varphi',\varphi}$ für jedes $\Delta\in|K(S)|$ den Isomorphismus $\eta_{\varphi',\varphi,\Delta} := \beta_{\varphi',\varphi}\circ\Delta : F_{\varphi'\circ\varphi}(\Delta)\longrightarrow F_{\varphi'}\circ F_{\varphi}(\Delta)$. Die Familie $\eta_{\varphi',\varphi} := (\eta_{\varphi',\varphi,\Delta})_{\Delta\in|K(S)|}$ ist ein natürlicher Isomorphismus $F_{\varphi'\circ\varphi}\longrightarrow F_{\varphi'}\circ F_{\varphi}$, denn es gilt

$$(F_{\varphi'}\circ F_{\varphi})(\delta)\circ\eta_{\varphi',\varphi,\Delta_1} =$$

$$= [\varepsilon_{\varphi'}\circ(\varepsilon_{\varphi}\circ\delta)]\circ(\beta_{\varphi',\varphi}\circ\Delta_1)$$

$$= [(\varepsilon_{\varphi'}\circ\varepsilon_{\varphi})\circ\delta]\circ(\beta_{\varphi',\varphi}\circ\Delta_1)$$

$$\overset{(1.3.2)}{=} (\beta_{\varphi',\varphi}\circ\Delta_2)\circ(\varepsilon_{\varphi'\circ\varphi}\circ\delta)$$

$$= \eta_{\varphi',\varphi,\Delta_2}\circ F_{\varphi'\circ\varphi}(\delta).$$

(5)Aus den Beziehungen (1.3.1) und (1.3.2) folgert man leicht, daß sich die für $\underline{B}$ erfüllten Kommutativitätsbedingungen (1.4.5) - (1.4.7) auf $\underline{K} := (K(S),F_{\varphi},\eta_S,\eta_{\varphi',\varphi})$ übertragen. Durch (1) - (4) wird also ein Kategoriensystem über C definiert.

(3.2)Definition

Sei K eine Kategorie und $\underline{B}_o$ ein Unterkategoriensystem des Basiswechsels über C. Das in (3.1) konstruierte Kategoriensystem $\underline{K}$ bezeichnen wir mit $[K,\underline{B}_o]$. $[K,\underline{B}_o]$ heißt das System der Diagramme vom Typ K in $\underline{B}_o$, ein Objekt $\Delta\in|[K,C_o\langle S\rangle]|$ ein Diagramm vom Typ K in $C_o\langle S\rangle$.

(3.3)Diese Bezeichnung wird durch den Fall motiviert, daß K eine endliche Kategorie ist (d.h. $|K|$ endlich, MorK endlich). Die Vorgabe eines Funktors $\Delta\colon K \to C_o\langle S\rangle$ bedeutet dann die Vorgabe endlich vieler $C_o\langle S\rangle$ - Objekte und - Morphismen, die gewisse durch K beschriebene Kommutativitätsbedingungen erfüllen. Wir geben ein Beispiel an, das in einer späteren Anwendung benötigt wird:

(3.4)Beispiel

Für $u \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ sei K(u) wie folgt definiert:

$$|K(u)| := \{0,1,\ldots,u\}$$

$$\mathrm{Hom}_{K(u)}(i,j) := \{(i,j)\} \quad \text{für } i \leq j$$

$$\mathrm{Hom}_{K(u)}(i,j) := \emptyset \quad \text{für } i > j.$$

Ein Diagramm Δ vom Typ K(u) in $C_o\langle S\rangle$ kann mittels

$$T_j := \Delta(j) \qquad (j = 0,\ldots,u)$$

$$\psi_j := \Delta(j-1,j) \quad (j = 1,\ldots,u)$$

mit einer $C_o\langle S\rangle$ - Sequenz

$$T_0 \xrightarrow{\psi_1} T_1 \xrightarrow{\psi_2} T_2 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow T_u$$

identifiziert werden.

Wir geben einige funktorielle Eigenschaften der eingeführten Kategoriensysteme an.

(3.5)Lemma Sei $\Delta \in |[K,C_o\langle S\rangle]|$, $\Delta' \in |[K,C_o\langle S'\rangle]|$ und $(\varphi,\delta') \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}[K,\underline{B}_o]}(\Delta,\Delta')$. Wir definieren

$$\Pi_1(\Delta) := \Pi_o \circ J_S \circ \Delta$$

$$\Pi_1(\varphi,\delta') := (\Pi_o(\varphi,\delta'_j))_{j\in|K|} .$$

Dann ist $\Pi_1 : \mathrm{Ass}[K,\underline{B}_o] \to [K,C]$ ein Funktor.

Beweis:
Im Hinblick auf (2.6) reicht es,

$$\Pi_1(\varphi,\delta') \in \mathrm{Hom}_{[K,C]}(\Pi_1(\Delta),\Pi_1(\Delta'))$$

nachzuweisen. Offensichtlich gilt

$$(\varphi,\delta'_j) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}\underline{B}}(\Delta(j),\Delta'(j)) \quad \forall\, j\in|K|$$

und somit

$$\pi_0(\varphi,\delta'_j) \in \mathrm{Hom}_C(\pi_0(\Delta(j)),\pi_0(\Delta'(j))) = \mathrm{Hom}_C(\pi_1(\Delta)(j),\pi_1(\Delta')(j)).$$

Für $\mu \in \mathrm{Hom}_K(j,1)$ gilt ferner

$$\delta'_1 \circ \otimes_\varphi(\Delta(\mu)) = \Delta'(\mu) \circ \delta'_j \ ;$$

es folgt

$$\begin{aligned}\Delta'(\mu)\circ\pi_0(\varphi,\delta'_j) &= \Delta'(\mu)\circ\delta'_j\circ\gamma^{S,1}_{\Delta(j)},S'_\varphi \\ &= \delta'_1\circ\otimes_\varphi(\Delta(\mu))\circ\gamma^{S,1}_{\Delta(j)},S'_\varphi \\ &= \delta'_1\circ\gamma^{S,1}_{\Delta(1)},S'_\varphi\circ\Delta(\mu) \\ &= \pi_0(\varphi,\delta'_1)\circ\Delta(\mu).\end{aligned}$$

Mit (2.6.2) ergibt sich hieraus

$$\pi_1(\varphi,\delta') \in \mathrm{Hom}_{[K,C]}(\pi_1(\Delta),\pi_1(\Delta')), \text{ w.z.b.w..}$$

(3.6)Lemma (1) Sei $\Delta \in |[K,C_0\langle S\rangle]|$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$.
=====
Dann gilt

$$\gamma_{\Delta,\varphi} := (\gamma^{S,1}_{\Delta(j)},S'_\varphi)_{j\in|K|} \in \mathrm{Hom}_{[K,C]}(\pi_1(\Delta),\pi_1\circ F_\varphi(\Delta)).$$

(2) Sei $\Delta \in |[K,C_0\langle S\rangle]|$ und seien $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$, $\varphi' \in \mathrm{Hom}_C(S',S'')$. Dann gilt

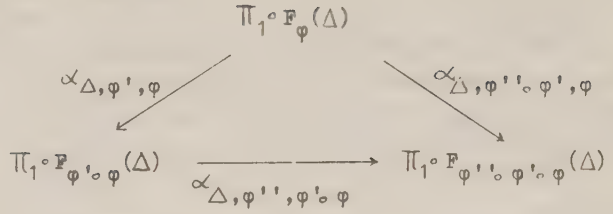
$$\alpha_{\Delta,\varphi',\varphi} := ((\beta_{\varphi',\varphi,\Delta(j)})_{j\in|K|})^{-1}\circ\gamma_{F_\varphi(\Delta),\varphi'} \in \mathrm{Hom}_{[K,C]}(\pi_1\circ F_\varphi(\Delta),\pi_1\circ F_{\varphi'\circ\varphi}(\Delta)).$$

(3) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(\Delta) & \\ {\scriptstyle\gamma_{\Delta,\varphi}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\gamma_{\Delta,\varphi'\circ\varphi}} \\ \pi_1\circ F_\varphi(\Delta) & \xrightarrow{\alpha_{\Delta,\varphi',\varphi}} & \pi_1\circ F_{\varphi'\circ\varphi}(\Delta) \end{array}$$

ist kommutativ.

(4) Das Diagramm



ist kommutativ.

Beweis:

Da $\gamma^{S,1}: \mathrm{proj}_{C<S>,1} \longrightarrow \overset{\otimes}{S}$ eine natürliche Transformation ist, folgt (1) offensichtlich aus (2.6.3). (2) ist eine Folgerung aus (1) und (2.6.2). Wegen (1) und (2) sind (3) und (4) Konsequenzen aus (2.4.4) bzw. der für $\underline{B}$ erfüllten Kommutativitätsbedingung (1.4.7).

(3.7) Lemma ===== Sei K eine Kategorie und K^* eine Unterkategorie von K. Für $S \in |C|$ sei

$$\phi_S : [K, C_o\langle S\rangle] \to [K^*, C_o\langle S\rangle]$$

der durch

$$\phi_S(\Delta) := \Delta|K^*$$

$$\phi_S(\delta) := (\delta_j)_{j\in|K^*|}$$

definierte Funktor. Dann ist $\Phi := (\phi_S)_{S\in|C|} : [K, \underline{B}_o] \longrightarrow [K^*, \underline{B}_o]$ ein Morphismus von Kategoriensystemen.

Beweis:

Trivialerweise ist ϕ_S ein Funktor, so daß die Kommutativitätsbedingungen (1.6.1) - (1.6.3) nachzuweisen bleiben.

(1) Für $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ und $\Delta \in |[K, C_o\langle S\rangle]|$ gilt

$$\begin{aligned} F^*_\varphi \circ \phi_S(\Delta) &= \otimes_\varphi \circ (\Delta|K^*) \\ &= (\otimes_\varphi \circ \Delta)|K^* \\ &= \phi_{S'} \circ F_\varphi(\Delta). \end{aligned}$$

Für $\delta \in \mathrm{Hom}_{[K, C_o\langle S\rangle]}(\Delta_1, \Delta_2)$ gilt ferner

$$\begin{aligned} F^*_\varphi \circ \phi_S(\delta) &= \otimes_\varphi \circ ((\delta_j)_{j\in|K^*|}) \\ &= (\otimes_\varphi(\delta_j))_{j\in|K^*|} \end{aligned}$$

$$= \Phi_{S'} \circ F_{\varphi}(\delta).$$

Es folgt $F^*_{\varphi} \circ \Phi_S = \Phi_{S'} \circ F_{\varphi}$.

(2) Wegen $(\Phi_S \circ \eta_S)_{\Delta} = (\beta_{S,\Delta(j)})_{j \in |K^*|} = (\eta^*_S \circ \Phi_S)_{\Delta}$ gilt $\Phi_S \circ \eta_S = \eta^*_S \circ \Phi_S$.

(3) Analog (2) folgt $\Phi_{S'',} \circ \gamma_{\varphi',\varphi} = \gamma^*_{\varphi',\varphi} \circ \Phi_S$; w.z.b.w..

(3.8) Corollar

Sei K^* eine Kategorie, $0 \in |K^*|$ ein fixiertes Objekt und $\Phi_S : [K^*, C_o\langle S\rangle] \to C_o\langle S\rangle$ der durch

$$\Phi_S(\Delta^*) := \Delta^*(0)$$

$$\Phi_S(\delta^*) := \delta^*_0$$

definierte Funktor. Dann ist $\bar{\Phi} := (\Phi_S)_{S \in |C|} : [K^*, \underline{B}_o] \to \underline{B}_o$ ein Morphismus von Kategoriensystemen.

Beweis: trivial.

(3.9) Anmerkung

In (1.10) haben wir zu ' $\bar{\Phi} : \underline{K} \to \underline{K}^*$, G_o: Ass$\underline{K}^* \to$ Ens ' die $(\bar{\Phi}, G_o)$ - Erweiterung von $\underline{K}$ konstruiert. Nach Vorangegangenem erhalten wir die jener Konstruktion zugrundeliegende Situation insbesondere dann, wenn wir

$$\underline{K} := [K, \underline{B}_o]$$

$$\underline{K}^* := [K^*, \underline{B}_o]$$

und $\bar{\Phi} : \underline{K} \to \underline{K}^*$

wie in (3.7) festsetzen und G_o: Ass$\underline{K}^* \to$ Ens folgendermaßen definieren:

Es sei Π_1: Ass$\underline{K}^* \to [K^*, C]$ der in (3.5) angegebene Funktor, $\tilde{\Pi} : [K^*, C] \to [K^*, \bar{C}]$ der durch " $\bar{S}_{\sigma} \mapsto \bar{S}$ " induzierte Funktor und $\Pi := \tilde{\Pi} \circ \Pi_1$; ferner sei G: $[K^*, \bar{C}] \to$ Ens ein weiterer Funktor. Wir setzen $G_o := G \circ \Pi$.

In Kapitel III werden $\underline{K}^*$ und G_o stets die hier beschriebene Form besitzen. Hingegen wird nicht vorausgesetzt, daß $\underline{K}$ und $\bar{\Phi}$ wie oben definiert sind.

4. Limites

(4.1) Sei $M \neq 0$ eine geordnete, aufsteigend gerichtete Menge und M_c die durch M induzierte Kategorie:

$$|M_c| := M$$

$$\mathrm{Hom}_{M_c}(\lambda,\mu) := \{(\lambda,\mu)\} \quad \text{für } \lambda \leq \mu$$

$$\mathrm{Hom}_{M_c}(\lambda,\mu) := \emptyset \text{ sonst.}$$

M_c^o bezeichne die zu M_c duale Kategorie:

$$|M_c^o| := |M_c|$$

$$\mathrm{Hom}_{M_c^o}(\lambda,\mu) := \mathrm{Hom}_{M_c}(\mu,\lambda) .$$

Sei K eine weitere Kategorie; jeden Funktor $P: M_c^o \longrightarrow K$ (bzw. $I: M_c \longrightarrow K$) nennen wir ein projektives (bzw. induktives) System in K mit Indexmenge M. Das durch ein Objekt $A \in |K|$ festgelegte konstante projektive (bzw. induktive) System bezeichnen wir wieder mit A. Es gilt offenbar

$$\mathrm{Hom}_{[M_c^o,K]}(A,B) = \mathrm{Hom}_K(A,B)$$

$$(\text{bzw. } \mathrm{Hom}_{[M_c,K]}(A,B) = \mathrm{Hom}_K(A,B)) .$$

(4.2) Definition

(1) Sei P ein projektives System in K mit Indexmenge M. Ein Paar (A,ζ) mit $A \in |K|$ und $\zeta \in \mathrm{Hom}_{[M_c^o,K]}(A,P)$ heißt ein Limes von P, falls folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt ist:

$$\forall\, B \in |K| \;\; \forall\, \xi \in \mathrm{Hom}_{[M_c^o,K]}(B,P) \;\; \exists!\, \varphi \in \mathrm{Hom}_K(B,A): \quad \zeta \circ \varphi = \xi .$$

(2) Sei I ein induktives System in K mit Indexmenge M. Ein Paar (A,η) mit $A \in |K|$ und $\eta \in \mathrm{Hom}_{[M_c,K]}(I,A)$ heißt ein Limes von I, falls gilt:

$$\forall\, B \in |K| \;\; \forall\, \xi \in \mathrm{Hom}_{[M_c,K]}(I,B) \;\; \exists!\, \varphi \in \mathrm{Hom}_K(A,B): \quad \varphi \circ \eta = \xi .$$

Offensichtlich ist ein Limes eines projektiven (induktiven) Systems bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
Aus den Definitionen folgt unmittelbar:

(4.3)Lemma (1) Seien $P,P'\colon M_c^o \longrightarrow K$ projektive Systeme mit Limites (A,ζ) bzw. (A',ζ').

$$\forall\, \xi \in \mathrm{Hom}_{[M_c^o,K]}(P,P')\ \exists!\ \varphi \in \mathrm{Hom}_K(A,A')\ :\ \zeta' \circ \varphi = \xi \circ \zeta .$$

(2) Seien $I,I'\colon M_c \longrightarrow K$ induktive Systeme mit Limites (A,η) bzw. (A',η').

$$\forall\, \xi \in \mathrm{Hom}_{[M_c,K]}(I,I')\ \exists!\ \varphi \in \mathrm{Hom}_K(A,A')\ :\ \varphi \circ \eta = \eta' \circ \xi .$$

Wir geben einige einfache Aussagen über projektive und induktive Limites an, wie zuvor gelte $C = \bar{C}\langle\bar{R}\rangle$.

A. Projektive Limites

(4.4)Lemma Jedes projektive System in $\bar{C}$ besitze einen Limes.
(1) Jedes projektive System in C besitzt einen Limes.
(2) Ist $P\colon M_c^o \longrightarrow C$ ein projektives System mit Limes (S,ζ), so ist $(\bar{S},\zeta)$ Limes des durch

$$\bar{P}\colon \lambda \longmapsto \widetilde{P(\lambda)}\ ,\ (\lambda,\mu) \longmapsto P(\lambda,\mu)$$

definierten projektiven Systems $\bar{P}\colon M_c^o \longrightarrow \bar{C}$.

Beweis:
(1): Sei $P\colon M_c^o \longrightarrow C$ ein projektives System in C und $\bar{P}\colon M_c^o \longrightarrow \bar{C}$ das in (2) definierte projektive System in $\bar{C}$. Nach Voraussetzung besitzt $\bar{P}$ einen Limes $(\bar{S},\zeta)$. Bezeichnet σ_λ den Strukturmorphismus von $P(\lambda)$, so ist $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in M} : \bar{R} \longrightarrow \bar{P}$ eine natürliche Transformation, es existiert also genau ein $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\bar{C}}(\bar{R},\bar{S})$ mit $\zeta_\lambda \circ \sigma = \sigma_\lambda \quad \forall \lambda \in M$. Wir definieren $S := \bar{S}_\sigma$, dann gilt $S \in |C|$, und nach Festlegung von σ ist $\zeta : S \longrightarrow P$ eine natürliche Transformation.
Sei $\zeta'\colon S' \longrightarrow P$ eine weitere natürliche Transformation. Zu $\zeta'\colon \bar{S}' \longrightarrow \bar{P}$ existiert genau ein $\varphi : \bar{S}' \longrightarrow \bar{S}$ mit $\zeta \circ \varphi = \zeta'$. Es folgt $\zeta \circ \varphi \circ \sigma' = \zeta' \circ \sigma' = (\sigma_\lambda)_{\lambda\in M}$ und somit $\varphi \circ \sigma' = \sigma$ aufgrund der Eindeutigkeitsaussage über σ . Folglich ist (S,ζ) Limes von P.

(2): Sei $(\tilde{S}',\zeta')$ Limes von $\tilde{P}$. Nach (1) existiert genau ein $\sigma': \tilde{R} \to \tilde{S}'$, derart daß $(\tilde{S}'_{\sigma'},\zeta')$ ein Limes von P ist. Nach Voraussetzung ist (S,ζ) ebenfalls Limes von P, also existiert genau ein Isomorphismus $\varphi: S \to \tilde{S}'_{\sigma'}$, mit $\zeta' \circ \varphi = \zeta$. Folglich ist $(\tilde{S},\zeta)$ ein Limes von $\tilde{P}$.

(4.5) Lemma Sei K eine Kategorie, $P: M_C^O \longrightarrow [K,C]$ ein projektives System, $\Delta \in |[K,C]|$ und $\zeta: \Delta \to P$ eine natürliche Transformation. Für $j \in |K|$ sei $P_j: M_C^O \longrightarrow C$ dann durch

$$P_j(\lambda) := P(\lambda)(j)$$

$$P_j(\lambda,\mu) := (P(\lambda,\mu))_j$$

definierte projektive System und $\zeta_j: \Delta(j) \to P_j$ die natürliche Transformation $(\zeta_{\lambda,j})_{\lambda \in M}$. Ist $(\Delta(j),\zeta_j)$ für jedes $j \in |K|$ Limes von P_j, so ist (Δ,ζ) Limes von P.

Beweis:
Sei $\Delta' \in |[K,C]|$ und $\zeta': \Delta' \to P$ eine natürliche Transformation. Zur natürlichen Transformation $\zeta'_j := (\zeta'_{\lambda,j})_{\lambda \in M}: \Delta'(j) \to P_j$ existiert genau ein $\delta_j: \Delta'(j) \to \Delta(j)$ mit $\zeta_j \circ \delta_j = \zeta'_j$. Wir setzen $\delta := (\delta_j)_{j \in |K|}$. Zum Nachweis von (4.5) reicht es offenbar zu zeigen, daß δ eine natürliche Transformation ist.
Sei $\chi \in \mathrm{Hom}_K(j,1)$. Für $\lambda \in M$ gilt

$$\begin{aligned}\zeta_{\lambda,1} \circ \Delta(\chi) \circ \delta_j &= P(\lambda)(\chi) \circ \zeta_{\lambda,j} \circ \delta_j \\ &= P(\lambda)(\chi) \circ \zeta'_{\lambda,j} \\ &= \zeta'_{\lambda,1} \circ \Delta'(\chi) \\ &= \zeta_{\lambda,1} \circ \delta_1 \circ \Delta'(\chi)\ ,\end{aligned}$$

also folgt $\Delta(\chi) \circ \delta_j = \delta_1 \circ \Delta'(\chi)$, w.z.b.w..

(4.6) Lemma Jedes projektive System in $\tilde{C}$ besitze einen Limes.

(1) Sei K eine Kategorie, jedes projektive System in $[K,C]$ besitzt einen Limes.

(2) Sei $\tilde{\pi}: [K,C] \longrightarrow [K,\tilde{C}]$ der kanonische Funktor (vgl. (3.9)). Ist $P: M_C^O \longrightarrow [K,C]$ ein projektives System mit Limes (Δ,ζ), so ist $(\tilde{\pi}(\Delta),\zeta)$ Limes von $\tilde{\pi} \circ P$.

Beweis:
(1): Sei $P: M_c^o \to [K,C]$ ein projektives System in $[K,C]$ und P_j das in (4.5) angegebene projektive System in C. Nach (4.4.1) besitzt P_j einen Limes $(\Delta(j),\zeta_j)$.
Sei $\chi \in \mathrm{Hom}_K(j,1)$; da für $\lambda \leq \mu$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \overset{P_j(\lambda,\mu)}{\longrightarrow} & \\ P_j(\mu) & & P_j(\lambda) \\ {\scriptstyle P(\mu)(\chi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P(\lambda)(\chi)} \\ P_1(\mu) & \underset{P_1(\lambda,\mu)}{\longrightarrow} & P_1(\lambda) \end{array}$$

kommutiert, ist $(P(\lambda)(\chi))_{\lambda\in M}: P_j \longrightarrow P_1$ eine natürliche Transformation. Nach Lemma (4.3.1) existiert deshalb genau ein $\Delta(\chi) \in \mathrm{Hom}_C(\Delta(j),\Delta(1))$ mit
(i) $\zeta_1 \circ \Delta(\chi) = (P(\lambda)(\chi))_{\lambda\in M} \circ \zeta_j$.
Nun ist $P(\lambda): K \longrightarrow C$ für jedes λ ein Funktor; also liefert die Eindeutigkeitsaussage für $\Delta(\chi)$ sofort $\Delta(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ und $\Delta(\chi' \circ \chi) = \Delta(\chi') \circ \Delta(\chi)$. Durch

$$\Delta : j \longmapsto \Delta(j),\ \chi \longmapsto \Delta(\chi)$$

wird folglich ein Funktor $\Delta: K \longrightarrow C$ gegeben. Definieren wir schließlich

$$\zeta := ((\zeta_{j,\lambda})_{j\in|K|})_{\lambda\in M} \quad ,$$

so erhalten wir wegen (i) eine natürliche Transformation $\zeta: \Delta \to P$. Offensichtlich stimmt die aus ζ gemäß (4.5) gewonnene natürliche Transformation ζ_j mit der vorgegebenen überein, so daß die Behauptung mit (4.5) folgt.
(2) In Lemma (4.5) nutzen wir nicht die spezielle Struktur der Kategorie C aus. Also gilt (4.5) auch dann, wenn C durch $\tilde{C}$ ersetzt wird. Aus diesem Grunde ist (2) eine triviale Folgerung aus (4.4.2).

(4.7) Lemma ===== Es sei $f: M \longrightarrow M$ eine monotone Funktion mit folgender Eigenschaft: $\forall \lambda\in M\ \exists \mu\in M: f(\mu) \geq \lambda$. Ferner sei $P: M_c^o \to C$ ein projektives System. Wir definieren ein weiteres projektives System $P_f: M_c^o \longrightarrow C$ durch

$$P_f(\lambda) := P(f(\lambda))$$
$$P_f(\lambda,\mu) := P(f(\lambda),f(\mu)).$$

Dann gilt:

(1) Ist (S,ζ) Limes von P, so ist (S,ζ_f) mit
$$\zeta_f := (\zeta_{f(\lambda)})_{\lambda\in M}$$
Limes von P_f.

(2) Sei (S,ζ) Limes von P_f. Es existiert genau eine natürliche Transformation $\zeta'\colon S \to P$ mit $\zeta'_{f(\lambda)} = \zeta_\lambda$ $\forall \lambda\in M$, und (S,ζ') ist Limes von P.

Beweis:

(1): Offensichtlich ist P_f ein projektives System und $\zeta_f: S\to P_f$ eine natürliche Transformation. Wir weisen die Limeseigenschaft nach:

Seien $S'\in|C|$ und $\xi : S' \to P_f$ gegeben. Wir definieren $\xi'\colon S'\to P$ wie folgt: Sei $\lambda\in M$, nach Voraussetzung existiert ein $\mu\in M$ mit $f(\mu) \geq \lambda$; es sei

$$\xi'_\lambda := P(\lambda,f(\mu))\circ\xi_\mu .$$

ξ' ist wohldefiniert: Sei $\mu'\in M$ ein weiteres Element mit $f(\mu') \geq \lambda$. Wir wählen μ_o so, daß $\mu_o \geq \mu$ und $\mu_o \geq \mu'$. Dann folgt

$$\begin{aligned} P(\lambda,f(\mu))\circ\xi_\mu &= P(\lambda,f(\mu))\circ P(f(\mu),f(\mu_o))\circ\xi_{\mu_o} \\ &= P(\lambda,f(\mu_o))\circ\xi_{\mu_o} \\ &= P(\lambda,f(\mu'))\circ P(f(\mu'),f(\mu_o))\circ\xi_{\mu_o} \\ &= P(\lambda,f(\mu'))\circ\xi_{\mu'} . \end{aligned}$$

Analog zeigt man, daß ξ' eine natürliche Transformation ist. Nach Voraussetzung existiert somit genau ein $\varphi\colon S'\to S$ mit $\zeta\circ\varphi = \xi'$. Sofort folgt $(\zeta_f)_\lambda\circ\varphi = \zeta_{f(\lambda)}\circ\varphi = \xi'_{f(\lambda)} = \xi_\lambda$, d.h. $\zeta_f\circ\varphi = \xi$. Da die Beziehung $\zeta_f\circ\varphi = \xi$ umgekehrt $\zeta\circ\varphi = \xi'$ impliziert, ist φ durch $\zeta_f\circ\varphi = \xi$ eindeutig bestimmt. Dies beweist die Behauptung.

(2): Der Beweis von (1) zeigt, daß man ζ - offensichtlich auf genau einem Weg - zu einer natürlichen Transformation $\zeta'\colon S\to P$ mit $\zeta'_{f(\lambda)} = \zeta_\lambda$ ergänzen kann. Man verifiziert analog (1), daß (S,ζ') Limes von P ist.

(4.8)Lemma Seien $P,P': M_c^o \longrightarrow C$ projektive Systeme, und sei $f: M \to M$ eine monotone Funktion mit $f(\lambda) \geq \lambda \ \forall \lambda \in M$. Ferner seien $\xi: P_f \longrightarrow P'$, $\xi': P' \longrightarrow P$ natürliche Transformationen mit

$$\xi'_\lambda \circ \xi_\lambda = P(\lambda, f(\lambda)) \quad \forall \lambda \in M ,$$

$$\xi_\lambda \circ \xi'_{f(\lambda)} = P'(\lambda, f(\lambda)) \quad \forall \lambda \in M .$$

Ist (S,ζ) Limes von P, so ist $(S, \xi \circ \zeta_f)$ Limes von P'.

Beweis:
Sei $S^* \in |C|$ und $\xi^*: S^* \longrightarrow P'$ eine natürliche Transformation. Dann ist $\xi' \circ \xi^*: S^* \longrightarrow P$ eine natürliche Transformation; also existiert genau ein $\varphi: S^* \longrightarrow S$ mit $\zeta \circ \varphi = \xi' \circ \xi^*$. Es folgt

$$\begin{aligned}(\xi \circ \zeta_f)_\lambda \circ \varphi &= \xi_\lambda \circ \zeta_{f(\lambda)} \circ \varphi \\ &= \xi_\lambda \circ \xi'_{f(\lambda)} \circ \xi^*_{f(\lambda)} \\ &= P'(\lambda, f(\lambda)) \circ \xi^*_{f(\lambda)} \\ &= \xi^*_\lambda ,\end{aligned}$$

d.h. $(\xi \circ \zeta_f) \circ \varphi = \xi^*$. Umgekehrt hat $(\xi \circ \zeta_f) \circ \varphi = \xi^*$ wegen

$$\begin{aligned}\xi'_\lambda \circ \xi^*_\lambda &= \xi'_\lambda \circ \xi_\lambda \circ \zeta_{f(\lambda)} \circ \varphi \\ &= P(\lambda, f(\lambda)) \circ \zeta_{f(\lambda)} \circ \varphi \\ &= \zeta_\lambda \circ \varphi\end{aligned}$$

die Beziehung $\xi' \circ \xi^* = \zeta \circ \varphi$ zur Folge; also ist φ durch $(\xi \circ \zeta_f) \circ \varphi = \xi^*$ eindeutig bestimmt.

B. Induktive Limites

(4.9)Lemma Sei $I: M_c \longrightarrow C$ ein induktives System, $S \in |C|$ und $\eta: I \to$ eine natürliche Transformation. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) (S,η) ist Limes von I

(2) (S,η) ist Limes des durch

$$\tilde{I}: \lambda \longrightarrow \widetilde{I(\lambda)}, \ (\lambda,\mu) \longrightarrow I(\lambda,\mu)$$

definierten induktiven Systems $\tilde{I}: M_c \longrightarrow \tilde{C}$.

Beweis:
I.f. sei $\tilde{S}_{\lambda \in \lambda} := I(\lambda)$ und $\varphi_{\lambda\mu} := I(\lambda,\mu)$.

(1) ===> (2):
Sei $\tilde{S}' \in |\tilde{C}|$ und $\xi: \tilde{I} \longrightarrow \tilde{S}'$ eine natürliche Transformation. Dann gilt

$$\xi_\mu \circ \sigma_\mu = \xi_\mu \circ \varphi_{\lambda\mu} \circ \sigma_\lambda = \xi_\lambda \circ \sigma_\lambda \quad \text{für } \mu \geq \lambda ,$$

also ist $\sigma' := \xi_\lambda \circ \sigma_\lambda$ von λ unabhängig und $\xi: I \longrightarrow S' := \tilde{S}'_{\sigma'}$ eine natürliche Transformation. Da (S,η) Limes von I ist, existiert genau ein $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ mit $\varphi \circ \eta = \xi$.

Es bleibt zu zeigen, daß es keinen weiteren Homomorphismus $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\tilde{S},\tilde{S}')$ mit $\tilde{\varphi} \circ \eta = \xi$ gibt. Dies folgt sofort aus

$$\tilde{\varphi} \circ \eta = \xi \quad ===> \quad \tilde{\varphi} \circ \sigma = \varphi \circ \eta_\lambda \circ \sigma_\lambda = \xi_\lambda \circ \sigma_\lambda = \sigma'$$
$$===> \quad \tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}_C(S,S').$$

(2) ===> (1):
Sei $S' \in |C|$ und $\xi: I \longrightarrow S'$ eine natürliche Transformation. Zur natürlichen Transformation $\xi: \tilde{I} \longrightarrow \tilde{S}'$ der zugrundeliegenden induktiven Systeme in $\tilde{C}$ existiert genau ein $\varphi: \tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}'$ mit $\varphi \circ \eta = \xi$. Dies impliziert offenbar $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$, also ist (S,η) Limes von I.

Aus (4.9) erhalten wir sofort:

(4.10) Corollar
========

Besitzt jedes induktive System in $\tilde{C}$ einen Limes, so auch jedes induktive System in C.

(4.11) Sei $I: M_C \longrightarrow C$ ein induktives System mit Limes (S,η), und sei $H: C \longrightarrow \mathrm{Ens}$ ein Funktor. Mit $(\varinjlim H \circ I, \xi)$ bezeichnen wir einen Limes des mengenwertigen induktiven Systems $H \circ I$. Zur natürlichen Transformation $H \circ \eta: H \circ I \longrightarrow H \circ S = H(S)$ existiert genau eine Abbildung

$$\chi_{H,I} : \varinjlim H \circ I \longrightarrow H(S) \quad \text{mit } \chi_{H,I} \circ \xi = H \circ \eta .$$

Es gilt:
(1) Folgende Aussagen sind äquivalent:
(i) $\chi_{H,I}$ ist surjektiv
(ii) $\forall \omega \in H(S)\ \exists \mu \in M \wedge \omega_\mu \in H(I(\mu)): H(\eta_\mu)(\omega_\mu) = \omega$.

Der Nachweis ist trivial.

II. Algebraische Vorbereitungen

5. Die Kategorie $\tilde{C}$ der (k,0) - Algebren

(5.1) Es sei k ein Körper und k-Alg die Kategorie der kommutativen k-Algebren mit Einselement ($1 = 0$ zugelassen, $\varphi(1) = 1$ für $\varphi \in \mathrm{Mor}(k\text{-Alg})$). Mit $\tilde{C}$ bezeichnen wir die bereits einleitend angegebene Kategorie der (k,0) - Algebren, es gilt

$$|\tilde{C}| = \{\tilde{S} = (|S|, \mathfrak{s}) \mid |S| \in |k\text{-Alg}|, \mathfrak{s} \subset |S| \text{ Ideal}, \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \mathfrak{s}^{\nu} = (0)\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\tilde{S},\tilde{S}') = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(|S|,|S'|) \mid \varphi(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}'\}.$$

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß $\tilde{C}$ ein Tensorprodukt und Differenzcokerne besitzt. Die erste Aussage ergibt sich aus folgendem Satz:

(5.2) Satz

(1) Die Kategorie k-Alg besitzt ein Tensorprodukt $(\underset{k}{\otimes}, \gamma^{k,1}, \gamma^{k,2})$.

(2) Seien $A_1, A_2 \in |k\text{-Alg}|$, $a_{11}, \ldots, a_{1m} \in A_1$ linear unabhängig über k und $a_{21}, \ldots, a_{2m} \in A_2$. Dann gilt:

$$\sum_{\mu=1}^{m} a_{1\mu} \otimes a_{2\mu} = 0 \Longrightarrow a_{21} = \ldots = a_{2m} = 0$$

(hierbei sei $a_1 \otimes a_2 := \gamma^{k,1}_{A_1,A_2}(a_1) \cdot \gamma^{k,2}_{A_1,A_2}(a_2)$ für $a_i \in A_i$).

Beweis:

In Zariski - Samuel [1], Chap.III, § 14 wird gezeigt, daß die Kategorie K der kommutativen k-Algebren mit Einselement $1 \neq 0$ ein Tensorprodukt $(\tilde{\otimes}, \tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^2)$ besitzt und dieses Tensorprodukt die Bedingung (2) erfüllt. Wir definieren

$$A_1 \underset{k}{\otimes} A_2 := \begin{cases} A_1 \tilde{\otimes} A_2 & \text{für } A_1, A_2 \in |K| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\gamma^{k,i}_{A_1,A_2} := \begin{cases} \tilde{\gamma}^i_{A_1,A_2} & \text{für } A_1, A_2 \in |K| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varphi_1 \underset{k}{\otimes} \varphi_2 := \begin{cases} \varphi_1 \tilde{\otimes} \varphi_2 & \text{für } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Mor}K \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter Beachtung von $\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,0) = \{0\}$ und $[\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(0,A) \neq \emptyset \Longrightarrow A = 0]$ ergibt sich leicht, daß $(\underset{k}{\otimes}, \gamma^{k,1}, \gamma^{k,2})$ die gewünschte Eigenschaft besitzt.

(5.3) **Satz** Seien S, $S' \in |\mathfrak{C}|$, und sei

$$(\delta,\delta') := \gamma^{k,1}_{|S|,|S'|}(\delta).(|S| \underset{k}{\otimes} |S'|) + \gamma^{k,2}_{|S|,|S'|}(\delta').(|S| \underset{k}{\otimes} |S'|) .$$

Dann gilt $\bigwedge_{\nu \in \mathbb{N}} (\delta,\delta')^{\nu} = (0)$.

Beweis:

Wir beschränken uns darauf, die wesentlichen Beweisschritte anzugeben. Zunächst folgert man aus (5.2.2):

(1) Sei $t \in |S| \underset{k}{\otimes} |S'|$, $t \neq 0$. Es existieren genau ein $m \in \mathbb{N}$, genau ein k-Untervektorraum V von $|S|$ und genau ein k-Untervektorraum W von $|S'|$ mit

(i) $\dim V = \dim W = m$

(ii) zu jeder Basis $s_1,\ldots,s_m$ von V existiert genau eine Basis $s'_1,\ldots,s'_m$ von W mit

$$\sum_{\mu=1}^{m} s_\mu \otimes s'_\mu = t .$$

Einfache Rechnungen zeigen sodann, daß für V bzw. W folgende spezielle Basen angegeben werden können:

(2) Für $s \in |S|$ sei $v_\delta(s)$ die Ordnung von s bzgl. δ (vgl. (7.3), analog $v_{\delta'}(s')$). Es gelte $t \in (\delta,\delta')^{\nu} - \{0\}$. Dann existiert eine Basis $s_1,\ldots,s_m$ von V mit folgender Eigenschaft: Ist $s'_1,\ldots,s'_m$ die gemäß (1,ii) zu $s_1,\ldots,s_m$ bestimmte Basis von W, so gilt

$$v_\delta(s_\mu) + v_{\delta'}(s'_\mu) \geq \nu \quad \text{für } \mu = 1,\ldots,m.$$

(3) Sei $m > 1$. Es existiert eine Basis $s_1^*,\dots,s_m^*$ von V mit

$$v_{\mathfrak{s}}(s_1^* + s) = v_{\mathfrak{s}}(s_1^*)$$

für jede Linearkombination s von $s_2^*,\dots,s_m^*$.

Aus (1) und (2) ergibt sich offensichtlich:

(4) Seien $s \in |S|$, $s' \in |S'|$, es gilt

$$s \otimes s' \in (\mathfrak{s},\mathfrak{s}')^{\nu} \iff v_{\mathfrak{s}}(s) + v_{\mathfrak{s}'}(s') \geq \nu .$$

(5) Sei $m > 1$, $s_1^*,\dots,s_m^*$ eine Basis von V wie in (3) und $s_1'^*,\dots,s_m'^*$ die gemäß (1,ii) zu $s_1^*,\dots,s_m^*$ bestimmte Basis von W. Gilt $t \in (\mathfrak{s},\mathfrak{s}')^{\nu}$, so existiert eine Linearkombination s von $s_2^*,\dots,s_m^*$ mit

$$(s_1^* + s) \otimes s_1'^* \in (\mathfrak{s},\mathfrak{s}')^{\nu} .$$

Man beweist dies unter Beachtung von (4) durch Induktion über m, indem man $s_1^*,\dots,s_m^*$ in eine Basis der Form (2) transformiert.

(4) bzw. (5) und (3) zeigen nun offensichtlich, daß $\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} (\mathfrak{s},\mathfrak{s}')^{\nu}$ kein Element $t \neq 0$ enthalten kann.

Aus (5.2.1) und (5.3) folgt sofort:

(5.4) Corollar

Für $\tilde{S},\tilde{S}' \in |\tilde{C}|$ bzw. $\varphi,\varphi' \in \mathrm{Mor}\tilde{C}$ sei

$$\tilde{S} \otimes \tilde{S}' := (|S| \underset{k}{\otimes} |S'|, (\mathfrak{s},\mathfrak{s}'))$$

bzw. $\varphi \otimes \varphi' := \varphi \underset{k}{\otimes} \varphi'$;

ferner sei

$$\gamma^i_{\tilde{S},\tilde{S}'} := \gamma^{k,i}_{|S|,|S'|} \quad (i = 1,2).$$

Dann ist $(\otimes,\gamma^1,\gamma^2)$ ein Tensorprodukt in $\tilde{C}$.

(5.5) Wir wenden uns dem Nachweis der zweiten Behauptung aus (5.1) zu und führen dazu die folgende Sprechweise ein: Sei $\tilde{S} \in |\tilde{C}|$ und $\mathfrak{a} \subset |S|$ ein Ideal, wir nennen $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\tilde{S}$ ("$\mathfrak{a} \subset \tilde{S}$ Ideal"), wenn

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} (\mathfrak{a} + \mathfrak{s}^{\nu}).$$

(5.6)Satz (1) $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{S},\tilde{S}') \Longrightarrow \ker\varphi$ Ideal in $\tilde{S}$.

(2) Sei $\mathfrak{a} \subset \tilde{S}$ ein Ideal, $\pi : |S| \longrightarrow |S|/\mathfrak{a}$ die Projektion und $\tilde{S}/\mathfrak{a} := (|S|/\mathfrak{a}, (\mathfrak{s}+\mathfrak{a})/\mathfrak{a})$. Dann gilt:

(i) $\tilde{S}/\mathfrak{a} \in |\tilde{C}|$, $\pi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{S},\tilde{S}/\mathfrak{a})$

(ii) Zu jedem $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{S},\tilde{S}')$ mit $\mathfrak{a} \subset \ker\varphi$ existiert genau ein $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{S}/\mathfrak{a},\tilde{S}')$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

Beweis:

(1): Wegen $\varphi(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}'$ gilt $\varphi(\mathfrak{s}^\nu) \subset \mathfrak{s}'^\nu$ und somit

$$\ker\varphi + \mathfrak{s}^\nu \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{s}'^\nu) \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Es folgt

$$\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} (\ker\varphi + \mathfrak{s}^\nu) \subset \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}(\mathfrak{s}'^\nu) = \varphi^{-1}\Big(\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \mathfrak{s}'^\nu\Big) = \varphi^{-1}(0) = \ker\varphi$$

und hieraus offensichtlich die Behauptung.

(2): Offenbar reicht es, $\tilde{S}/\mathfrak{a} \in |\tilde{C}|$, d.h. $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} ((\mathfrak{s}+\mathfrak{a})/\mathfrak{a})^\nu = (0)$ zu verifizieren, das weitere ergibt sich aus den entsprechenden Aussagen in k-Alg. Wir benötigen dabei:

(iii) Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A_1,A_2)$ und seien $\mathfrak{a}_\nu \subset A_1$ Ideale mit $\ker\varphi \subset \mathfrak{a}_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$. Dann gilt

$$\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \varphi(\mathfrak{a}_\nu) = \varphi\Big(\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_\nu\Big).$$

Der Nachweis ist trivial! Damit erhalten wir:

$$(0) = \pi(\mathfrak{a}) = \pi\Big(\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} (\mathfrak{a}+\mathfrak{s}^\nu)\Big) \overset{(iii)}{=} \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \pi(\mathfrak{a}+\mathfrak{s}^\nu) = \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} ((\mathfrak{s}+\mathfrak{a})/\mathfrak{a})^\nu,$$

w.z.b.w..

(5.7)Corollar

Die Kategorie $\tilde{C}$ besitzt Differenzcokerne.

Beweis:

Seien $\varphi,\varphi' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{S},\tilde{S}')$,

$$\mathfrak{a}' := \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} (\{\varphi(s) - \varphi'(s) \mid s \in |S|\}.|S'| + \mathfrak{s}'^\nu)$$

und $\pi' : \tilde{S}' \longrightarrow \tilde{S}'/\mathfrak{a}'$ die Projektion. Aus (5.6.2) folgt sofort, daß $(\tilde{S}'/\mathfrak{a}', \pi')$ Differenzcokern von φ und φ' ist.

(5.8)Beispiel

Die Aussage (5.7) wird falsch, wenn wir k-Alg durch die Kategorie K der kommutativen k-Algebren mit Einselement $1 \neq 0$ ersetzen. Sei $|S| := k[x]$, $\mathfrak{s} := (0)$, $|S'| := k$, $\mathfrak{s}' := (0)$, und seien φ_1 bzw. φ_2 die durch

$$\varphi_1 : x \longmapsto 0$$

bzw. $$\varphi_2 : x \longmapsto 1$$

festgelegten k-Algebrahomomorphismen. Ist $\tilde{S}''$ eine (k,0) - Algebra und $\pi : \tilde{S}' \longrightarrow \tilde{S}''$ ein Homomorphismus mit $\pi\circ\varphi_1 = \pi\circ\varphi_2$, so gilt in $\tilde{S}''$:

$$0 = \pi(0) = \pi\circ\varphi_1(x) = \pi\circ\varphi_2(x) = \pi(1) = 1.$$

Also besitzen φ_1, φ_2 keinen Differenzcokern in K.

6. Die Kategorie C der R - Algebren

(6.1)Es sei $\tilde{R} = (|R|,\mathfrak{r}) \in |\tilde{C}|$ ein fest gewähltes Objekt und $C := \tilde{C}\langle\tilde{R}\rangle$ die Kategorie der Objekte nach $\tilde{R}$; wir setzen $R := (\tilde{R}, id_{\tilde{R}})$ und nennen C die Kategorie der R-Algebren. Für $S \in |C|$ sei $C\langle S\rangle$ die Kategorie der Objekte nach S. Analog (2.3) geben wir Objekte der Kategorie $C\langle S\rangle$ in der Form $T = \tilde{T}_\Theta$ mit $\tilde{T} \in |\tilde{C}|$ und $\Theta \in \mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\tilde{S},\tilde{T})$ vor. Wir geben zunächst einige Eigenschaften der Kategorien C, $C\langle S\rangle$ an:

(1) Die Kategorie $C\langle S\rangle$ besitzt ein Tensorprodukt $(\underset{S}{\otimes}, \gamma^{S,1}, \gamma^{S,2})$.

Beweis: (5.4), (5.7), (2.4.1).

(2) Aus den vorangegangenen Beweisen schließt man, daß das Tensorprodukt $T_1 \underset{S}{\otimes} T_2$ zweier $C\langle S\rangle$-Objekte $T_i = (|T_i|, 4_i)_{\Theta_i}$ wie folgt erhalten wird:

Man setze:

$$(4_1,4_2) = \gamma^{k,1}_{|T_1|,|T_2|}(4_1).(|T_1| \underset{k}{\otimes} |T_2|) + \gamma^{k,2}_{|T_1|,|T_2|}(4_2).(|T_1| \underset{k}{\otimes} |T_2|)$$

$$\mathcal{A}_{12} = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} (\{\gamma^{k,1}_{\delta|T_1|,|T_2|} \circ \Theta_1(s) - \gamma^{k,2}_{\delta|T_1|,|T_2|} \circ \Theta_2(s) | s \in |S|\} .$$

$$.(|T_1| \underset{k}{\otimes} |T_2|) + (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)^{\nu})$$

$$|T_1 \underset{S}{\otimes} T_2| = |T_1| \underset{k}{\otimes} |T_2| / \mathcal{A}_{12}$$

$\pi: |T_1| \underset{k}{\otimes} |T_2| \longrightarrow |T_1 \underset{S}{\otimes} T_2|$ die Projektion

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \pi(\mathcal{A}_{12})$$

$$\Theta_{12} := \pi \circ \gamma^{k,1}_{\delta|T_1|,|T_2|} \circ \Theta_1 \quad ;$$

dann gilt

$$T_1 \underset{S}{\otimes} T_2 = (|T_1 \underset{S}{\otimes} T_2|, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \Theta_{12}).$$

Darüber hinaus hat man

$$\gamma^{S,i}_{\delta T_1, T_2} = \pi \circ \gamma^{k,i}_{\delta|T_1|,|T_2|} \quad , \ i = 1,2.$$

(3) Über C kann der Basiswechsel $\underline{B} = (C\langle S\rangle, \otimes_\varphi, \beta_S, \beta_{\varphi'}, \varphi)$ wie in (2.4), (2.5) gebildet werden.

Beweis: (5.4),(5.7),(2.4).

(4) Sei $\mathfrak{T} \subset |C\langle S\rangle|$ und $\sigma \subset \mathfrak{T}$ ein Ideal. Bezeichnet $\pi: \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}/\sigma$ die Projektion, so sei $T/\sigma := (\mathfrak{T}/\sigma)_{\pi \circ \Theta}$. Es ist evident, daß sich die Aussage (5.6) auf $C\langle S\rangle$ überträgt.

Wir untersuchen i.f. die Wirkung von $\otimes$ auf surjektive Morphismen:

(6.2)Definition

Seien T_1, $T_2 \in |C\langle S\rangle|$, und sei $\Psi \in \mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(T_1, T_2)$. Ψ heißt ein Epimorphismus (oder surjektiv) genau dann, wenn die Bedingungen

(1) $\Psi: |T_1| \to |T_2|$ ist surjektiv

(2) $\Psi(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$

erfüllt sind.

(6.3)Satz Seien $\Psi_i \in \mathrm{Hom}_{C<S>}(T_i, T_i^*)$ Epimorphismen, $i = 1,2$. Ferner sei

$$\alpha := \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} (\gamma^{S,1}_{T_1,T_2}(\ker\Psi_1).|T_1 \underset{S}{\otimes} T_2| + \gamma^{S,2}_{T_1,T_2}(\ker\Psi_2).|T_1 \underset{S}{\otimes} T_2| + (A_1 \otimes A_2)^\nu)$$

und $\pi : T_1 \underset{S}{\otimes} T_2 \to (T_1 \underset{S}{\otimes} T_2)/\alpha$ die Projektion. Dann existiert genau ein Isomorphismus

$$\Psi: (T_1 \underset{S}{\otimes} T_2)/\alpha \xrightarrow{\sim} T_1^* \underset{S}{\otimes} T_2^* ,$$

so daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} & T_1 \underset{S}{\otimes} T_2 & \\ {\scriptstyle\pi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \Psi_1 \underset{S}{\otimes} \Psi_2} \\ (T_1 \underset{S}{\otimes} T_2)/\alpha & \xrightarrow{\Psi} & T_1^* \underset{S}{\otimes} T_2^* \end{array}$$

Beweis:
Wegen $(\Psi_1 \underset{S}{\otimes} \Psi_2)\circ\gamma^{S,i}_{T_1,T_2} = \gamma^{S,i}_{T_1^*,T_2^*}\circ\Psi_i$ gilt

$$\Psi_1 \underset{S}{\otimes} \Psi_2 \mid \gamma^{S,i}_{T_1,T_2}(\ker\Psi_i) = 0 \quad , \ i = 1,2.$$

Dies impliziert $\alpha \subset \ker\Psi_1 \underset{S}{\otimes} \Psi_2$, also existiert genau ein

$$\Psi \in \mathrm{Hom}_{C<S>}((T_1 \underset{S}{\otimes} T_2)/\alpha, T_1^* \underset{S}{\otimes} T_2^*) \text{ mit } \Psi\circ\pi = \Psi_1 \underset{S}{\otimes} \Psi_2 .$$

Nach Voraussetzung ist Ψ_i surjektiv. Wegen $\ker\Psi_i \subset \ker(\pi\circ\gamma^{S,i}_{T_1,T_2})$ existiert somit genau ein

$$\bar{\Psi}_i \in \mathrm{Hom}_{C<S>}(T_i^*, (T_1 \underset{S}{\otimes} T_2)/\alpha) \text{ mit } \bar{\Psi}_i\circ\Psi_i = \pi\circ\gamma^{S,i}_{T_1,T_2} .$$

Zum Paar $(\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2)$ existiert schließlich genau ein

$$\bar{\Psi}: T_1^* \underset{S}{\otimes} T_2^* \to (T_1 \underset{S}{\otimes} T_2)/\alpha \text{ mit } \bar{\Psi}\circ\gamma^{S,i}_{T_1^*,T_2^*} = \bar{\Psi}_i \ , \ i = 1,2.$$

Man verifiziert leicht $\bar{\Psi}\circ\Psi = \mathrm{id}_{(T_1 \underset{S}{\otimes} T_2)/\alpha}$ und $\Psi\circ\bar{\Psi} = \mathrm{id}_{T_1^* \underset{S}{\otimes} T_2^*}$.

Also ist Ψ ein Isomorphismus und $\bar{\Psi}$ das Inverse von Ψ .

Als einfache Folgerung aus (6.3) erhalten wir:

(6.4)Corollar 1

(1) Sind $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathrm{Mor}C\langle S\rangle$ Epimorphismen, so ist auch $\Psi_1 \underset{S}{\otimes} \Psi_2$ ein Epimorphismus.

(2) Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ und $\Psi \in \mathrm{Mor}C\langle S\rangle$ ein Epimorphismus. Dann ist auch $\otimes_\varphi(\Psi)$ ein Epimorphismus.

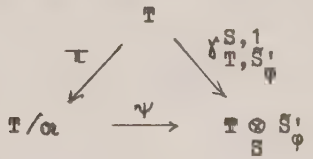
Für spätere Anwendungen geben wir zwei Spezialfälle von (6.3) an:

(6.5)Corollar 2

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ ein Epimorphismus. Für $T \in |C\langle S\rangle|$ sei

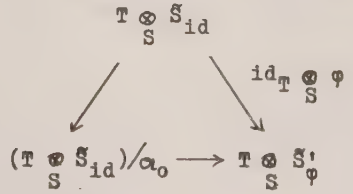
$$\alpha := \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} (\Theta(\ker\varphi).|T| + 4^\nu)$$

und $\pi : T \longrightarrow T/\alpha$ die natürliche Projektion. Es existiert genau ein Isomorphismus $\Psi : T/\alpha \xrightarrow{\sim} T \underset{S}{\otimes} \bar{S}'_\varphi$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:



Beweis:

Wenden wir (6.3) auf die Epimorphismen $id_T : T \to T$ und $\varphi : \bar{S}_{id} \longrightarrow \bar{S}'_\varphi$ an, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm



mit $\alpha_o = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} (\gamma^{S,2}_{T,\bar{S}_{id}}(\ker\varphi).|T \underset{S}{\otimes} \bar{S}_{id}| + (4 \otimes \lambda)^\nu)$. Nun ist $\gamma^{S,1}_{T,\bar{S}_{id}} : T \longrightarrow T \underset{S}{\otimes} \bar{S}_{id}$ ein Isomorphismus mit $\gamma^{S,1}_{T,\bar{S}_{id}} \circ \Theta = \gamma^{S,2}_{T,\bar{S}_{id}}$ (vgl. (2.4.3)). Es folgt $(\gamma^{S,1}_{T,\bar{S}_{id}})^{-1}(\alpha_o) = \alpha$ und die Existenz eines kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\gamma^{S,1}_{T,\tilde{S}_{id}}} & T \underset{S}{\otimes} \tilde{S}_{id} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ T/\sigma & \xrightarrow{\sim} & (T \underset{S}{\otimes} \tilde{S}_{id})/\sigma_o \end{array} .$$

Unter Beachtung von $(id_T \underset{S}{\otimes} \varphi)\cdot \gamma^{S,1}_{T,\tilde{S}_{id}} = \gamma^{S,1}_{T,\tilde{S}_{\varphi}}$ erhalten wir durch Zusammenfügen beider Diagramme die gewünschte Aussage.

Vertauschen wir die Rollen von $\tilde{S}'_{\varphi}$ und T, so erhalten wir entsprechend:

(6.6) Corollar 3

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ und $T \in |C\langle S\rangle|$ ein Objekt mit surjektivem Strukturmorphismus $\Theta\colon \tilde{S}_{id} \longrightarrow T$. Ferner sei

$$\sigma' := \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} (\varphi(\ker\Theta).|S'| + \lambda'^{\nu})$$

und $\pi'\colon \tilde{S}'_{\varphi} \longrightarrow \tilde{S}'_{\varphi}/\sigma'$ die Projektion. Dann existiert genau ein Isomorphismus $\Psi'\colon \tilde{S}'_{\varphi}/\sigma' \longrightarrow T \underset{S}{\otimes} \tilde{S}'_{\varphi}$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S}'_{\varphi} & \\ {\scriptstyle\pi'}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\gamma^{S,2}_{T,\tilde{S}'_{\varphi}}} \\ \tilde{S}'_{\varphi}/\sigma' & \xrightarrow{\Psi'} & T \underset{S}{\otimes} \tilde{S}'_{\varphi} \end{array} .$$

Eine triviale Konsequenz aus (6.6) ist folgende Aussage:

(6.7) Satz Für $S \in |C|$ sei $C_q\langle S\rangle$ die volle Unterkategorie von $C\langle S\rangle$ der Quotienten von $\tilde{S}$, d.h. die durch

$$|C_q\langle S\rangle| := \{T \in |C\langle S\rangle| \mid \Theta \text{ surjektiv}\}$$

bestimmte Unterkategorie von $C\langle S\rangle$. Dann ist

$$\underline{B}_q := (C_q\langle S\rangle, \otimes_{\varphi}, \beta_S, \beta_{\varphi'}, \varphi)$$

ein Unterkategoriensystem von $\underline{B}$.

Für weitere Untersuchungen benötigen wir den Begriff des Polynomringes über S :

(6.8)Definition

Sei $k[x]$ der Polynomring über k in den Unbestimmten $x = (x_1,\dots,x_N)$, $(x) := \{x_1,\dots,x_N\}.k[x]$ das von $x_1,\dots,x_N$ erzeugte Ideal und $k_N := (k[x],(x))$. Für $S \in |\mathbf{C}|$ sei

$$\tilde{S}[x] := \tilde{S} \otimes k_N$$

$$j := \gamma^1_{\tilde{S},k_N}$$

und $$S[x] := (\tilde{S}|x|)_j .$$

Das Objekt $S[x] \in |C\langle S\rangle|$ heißt der Polynomring über S in den Unbestimmten $x = (x_1,\dots,x_N)$.

Für $s \in |S|$ und $p \in k[x]$ schreiben wir $sp := j(s).\gamma^2_{\tilde{S},k_N}(p)$.

Wegen (5.2.2) und (5.4) identifiziert sich dadurch $|S[x]|$ mit $|S|[x]$, und $j\colon |S| \longrightarrow |S[x]|$ wird die kanonische Inklusion. Das definierende Ideal in $S[x]$ wird nach (5.4) von δ und (x) erzeugt.

Wir fügen die folgenden Definitionen an:

(6.9)Definition

(1) $T \in |C\langle S\rangle|$ heißt von endlichem Typ, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ und einen Epimorphismus $\psi\colon S[x_1,\dots,x_N] \to T$ gibt.

(2) $T \in |C\langle S\rangle|$ heißt endlich präsentiert, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ und einen Epimorphismus $\psi\colon S[x_1,\dots,x_N] \to T$ mit endlich erzeugbarem Kern gibt.

(3) $T \in |C\langle S\rangle|$ heißt endlich, wenn T von endlichem Typ und $|T|$ vermöge Θ ein endlicher $|S|$-Modul ist.

(6.10)Satz Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$, $N \in \mathbb{N}$ und $x = (x_1,\dots,x_N)$. Es existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$\chi\colon \otimes_\varphi(S[x]) \xrightarrow{\sim} S'[x].$$

Beweis:

Definitionsgemäß gilt

$$\otimes_\varphi(S[x]) = (|S[x] \underset{S}{\otimes} \tilde{S}'_\varphi|,\ (\delta,(x)) \otimes \delta',\ \gamma^S_{S[x]^2},\tilde{S}'_\varphi),$$

und es existiert ein Epimorphismus

π: $(|S|[x] \underset{k}{\otimes} |S'|, ((\mathfrak{s},(x)),\mathfrak{s}')) \longrightarrow (|S[x] \underset{S}{\otimes} \tilde{S}'_{\varphi}|, (\mathfrak{s},(x))\otimes\mathfrak{s}')$,

derart daß $((|S[x] \underset{S}{\otimes} \tilde{S}'_{\varphi}|, (\mathfrak{s},(x))\otimes\mathfrak{s}'), \pi)$ Differenzcokern von

$\gamma^{k,1}_{|S|[x],|S'|} \circ j$ und $\gamma^{k,2}_{|S|[x],|S'|} \circ \varphi$ ist. Es sei $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{k[x]}$.

Zu $\varphi \underset{k}{\otimes} \mathrm{id}$: $(|S|[x],(\mathfrak{s},(x))) \longrightarrow (|S'|[x],(\mathfrak{s}',(x)))$

und zur Inklusion

$$j': (|S'|,\mathfrak{s}') \longrightarrow (|S'|[x],(\mathfrak{s}',(x)))$$

existiert genau ein

$$\Phi: (|S|[x] \underset{k}{\otimes} |S'|, ((\mathfrak{s},(x)),\mathfrak{s}') \longrightarrow (|S'|[x],(\mathfrak{s}',(x)))$$

mit $\Phi \circ \gamma^{k,1}_{|S|[x],|S'|} = \varphi \underset{k}{\otimes} \mathrm{id}$

und $\Phi \circ \gamma^{k,2}_{|S|[x],|S'|} = j'$.

Wegen

$$\Phi \circ \gamma^{k,1}_{|S|[x],|S'|} \circ j = (\varphi \underset{k}{\otimes} \mathrm{id}) \circ j = j' \circ \varphi$$

$$= \Phi \circ \gamma^{k,2}_{|S|[x],|S'|} \circ \varphi$$

existiert nach Obigem genau ein

$$\chi: (|S[x] \underset{S}{\otimes} \tilde{S}'_{\varphi}|, (\mathfrak{s},(x))\otimes\mathfrak{s}') \longrightarrow (|S'|[x],(\mathfrak{s}',(x)))$$

mit $\chi \circ \pi = \Phi$; offensichtlich gilt $\chi \in \mathrm{Hom}_{C<S>}(\mathfrak{S}_{\varphi}(S[x]), S'[x])$.

Wir wollen zeigen, daß χ ein Isomorphismus ist und geben zu diesem Zweck das Inverse $\overline{\chi}$ von χ an. Zu

$$\gamma^{k,2}_{|S|[x],|S'|}: (|S'|,\mathfrak{s}') \longrightarrow (|S|[x] \underset{k}{\otimes} |S'|, ((\mathfrak{s},(x)),\mathfrak{s}'))$$

und $\gamma^{k,1}_{|S|[x],|S'|} \circ \gamma^{k,2}_{|S|,k[x]}: k_N \longrightarrow (|S|[x] \underset{k}{\otimes} |S'|, ((\mathfrak{s},(x)),\mathfrak{s}'))$

existiert genau ein

$$\Psi: (|S'| \underset{k}{\otimes} k[x], (\mathfrak{s}',(x))) \longrightarrow (|S|[x] \underset{k}{\otimes} |S'|, ((\mathfrak{s},(x)),\mathfrak{s}'))$$

mit $\Psi \circ j' = \gamma^{k,2}_{|S|[x],|S'|}$

und $\Psi \circ \gamma^{k,2}_{|S'|,k[x]} = \gamma^{k,1}_{|S|[x],|S'|} \circ \gamma^{k,2}_{|S|,k[x]}$.

Wir setzen $\overline{\chi} := \pi \circ \psi$ und gewinnen so einen Homomorphismus

$$\overline{\chi} : S'[x] \longrightarrow \otimes_\varphi(S[x])$$

Es gilt $\chi \circ \overline{\chi} = \chi \circ \pi \circ \psi = \phi \circ \psi$; wegen

$$\phi \circ \psi \circ j' = \phi \circ \gamma^{k,2}_{|S|[x],|S'|} = j'$$

und $$\phi \circ \psi \circ \gamma^{k,2}_{|S'|,k[x]} = \phi \circ \gamma^{k,1}_{|S|[x],|S'|} \circ \gamma^{k,2}_{|S|,k[x]}$$

$$= (\varphi \underset{k}{\otimes} \mathrm{id}) \circ \gamma^{k,2}_{|S|,k[x]} = \gamma^{k,2}_{|S'|,k[x]}$$

folgt also $\chi \circ \overline{\chi} = \mathrm{id}_{S'[x]}$. Analog verifiziert man $\overline{\chi} \circ \chi = \mathrm{id}_{\otimes_\varphi(S[x])}$, also ist χ ein Isomorphismus und $\overline{\chi}$ das Inverse von χ.

Aus (6.10) und (6.4.2) folgt sofort:

(6.11) **Corollar 1**

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ und $T \in |C\langle S\rangle|$ von endlichem Typ. Dann ist auch $\otimes_\varphi(T) \in |C\langle S'\rangle|$ von endlichem Typ.

Ferner erhalten wir:

(6.12) **Corollar 2**

Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ und $T \in |C\langle S\rangle|$ endlich. Dann ist auch $\otimes_\varphi(T) \in |C\langle S'\rangle|$ endlich.

Beweis:
Wegen (6.11) reicht es zu zeigen, daß $|\otimes_\varphi(T)|$ vermöge $\gamma^{S,2}_{T,S',\varphi}$ ein endlicher $|S'|$-Modul ist. Dies ist in der Tat der Fall. Ist nämlich $t_1,\ldots,t_r$ ein Erzeugendensystem von $|T|$ über $|S|$, so ist $\gamma^{S,1}_{T,S',\varphi}(t_1),\ldots,\gamma^{S,1}_{T,S',\varphi}(t_r)$ offensichtlich ein Erzeugendensystem von $|\otimes_\varphi(T)|$ über $|S'|$.

Aus (6.11) und (6.12) erhalten wir unmittelbar die folgenden Aussagen:

(6.13)Satz Für $S \in |C|$ sei $C_{et}\langle S\rangle$ die volle Unterkategorie von $C\langle S\rangle$
==== der Objekte

$$|C_{et}\langle S\rangle| := \{T \in |C\langle S\rangle| \mid T \text{ von endlichem Typ}\}.$$

Dann ist

$$\underline{B}_{et} := (C_{et}\langle S\rangle, \otimes_\varphi, \beta_S, \beta_\varphi', \varphi)$$

ein Unterkategoriensystem von $\underline{B}$.

(6.14)Satz Für $S \in |C|$ sei $C_e\langle S\rangle$ die volle Unterkategorie von $C\langle S\rangle$
==== der Objekte

$$|C_e\langle S\rangle| := \{T \in |C\langle S\rangle| \mid T \text{ endlich}\}$$

Dann ist

$$\underline{B}_e := (C_e\langle S\rangle, \otimes_\varphi, \beta_S, \beta_\varphi', \varphi)$$

ein Unterkategoriensystem von $\underline{B}$.

(6.15)Wir führen noch folgende Sprechweise ein: Sei $S \in |C|$ bzw. $T \in |C\langle S\rangle|$;

(1) S (bzw.T) heißt lokal genau dann, wenn $|S|$ (bzw. $|T|$) lokal und $\mathfrak{s}$ (bzw. $\mathfrak{t}$) das maximale Ideal von $|S|$ (bzw. $|T|$) ist.

(2) S (bzw. T) heißt semi-lokal genau dann, wenn $|S|$ (bzw. $|T|$) semi-lokal und $\mathfrak{s}$ (bzw. $\mathfrak{t}$) das Jacobson - Radikal von $|S|$ (bzw. $|T|$) ist.

Die weiteren im Zusammenhang mit S bzw. T auftretenden algebraischen Begriffe beziehen sich auf die Träger $|S|$ bzw. $|T|$. Z.B. nennen wir S bzw. T noethersch, wenn gleiches für $|S|$ bzw. $|T|$ der Fall ist. Insbesondere gilt also:

(3) Ist S noethersch, so ist jedes $T \in |C_{et}\langle S\rangle|$ endlich präsentiert.

Beweis: Zariski - Samuel [1], p.201, Theorem 1; p.199,1).

7. Projektive Limites in C und Funktorkategorien

(7.1) Satz Jedes projektive System $P: M_c^o \longrightarrow C$ besitzt einen Limes.

Beweis:

Nach (4.4.1) reicht es zu zeigen, daß jedes projektive System $\tilde{P}: M_c^o \longrightarrow \tilde{C}$ einen Limes $(\tilde{S},\zeta)$ besitzt. Wir beschränken uns darauf, $(\tilde{S},\zeta)$ anzugeben; aus entsprechenden Aussagen über k-Algebren schließt man sofort die Limeseigenschaft.

Sei $\tilde{S}_\lambda = \tilde{P}(\lambda)$, $\varphi_{\lambda\mu} = P(\lambda,\mu)$,

$$|S| := \{s = (s_\lambda) \in \prod_{\lambda\in M} |S_\lambda| \mid \varphi_{\lambda\mu}(s_\mu) = s_\lambda \text{ für } \mu \geq \lambda\}$$

und $\mathfrak{s} := (\prod_{\lambda\in M} \mathfrak{s}_\lambda) \cap |S|$. Es gilt

$$\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} (\prod_{\lambda\in M} \mathfrak{s}_\lambda)^\nu \subset \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} (\prod_{\lambda\in M} \mathfrak{s}_\lambda^\nu) = \prod_{\lambda\in M} (\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \mathfrak{s}_\lambda^\nu) = (0).$$

Folglich ist $\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} \mathfrak{s}^\nu = (0)$ und $\tilde{S} := (|S|,\mathfrak{s})$ eine wohldefinierte (k,0)-Algebra.

Sei $j: |S| \hookrightarrow \prod_{\lambda\in M} |S_\lambda|$ die Inklusion und $\pi_\mu: \prod_{\lambda\in M} |S_\lambda| \longrightarrow |S_\mu|$ die natürliche Projektion. Für $\zeta_\mu := \pi_\mu \circ j: |S| \longrightarrow |S_\mu|$ gilt $\zeta_\mu(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}_\mu$ und $\varphi_{\lambda\mu}\circ\zeta_\mu = \zeta_\lambda$ $(\mu \geq \lambda)$. Es folgt $\zeta := (\zeta_\mu)_{\mu\in M} \in \mathrm{Hom}_{[M_c^o,\tilde{C}]}(\tilde{S},\tilde{P})$, und $(\tilde{S},\zeta)$ ist der gesuchte Limes.

(7.2) Wir verwenden (7.1) zur Konstruktion des Komplettierungsfunktors $\wedge: C \to C$:

(1) Für $S \in |C|$ und $n,m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ sei $\pi_{S,n}: S \longrightarrow S_n := S/\mathfrak{s}^n$ die Projektion und $\varphi_{S,nm}: S_m \longrightarrow S_n$ der durch $\varphi_{S,nm}\circ\pi_{S,m} = \pi_{S,n}$ eindeutig bestimmte Homomorphismus. Offensichtlich ist

$$P_S: n \longmapsto S_n\ ,\ (n,m) \longmapsto \varphi_{S,nm}$$

ein projektives System $\mathbb{N}_c^o \longrightarrow C$. $(\hat{S},\zeta_S)$ sei der in (7.1) mittels (4.4) konstruierte Limes von P_S.

(2) Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$, wegen $\varphi(\mathfrak{s}^n) \subset \mathfrak{s}'^n$ existiert genau ein $\varphi_n \in \mathrm{Hom}_C(S_n,S'_n)$ mit $\varphi_n\circ\pi_{S,n} = \pi_{S',n}\circ\varphi$. Sofort folgt $\varphi_n\circ\varphi_{S,nm} = \varphi_{S',nm}\circ\varphi_m$ für $m \geq n$. Also ist $(\varphi_n): P_S \longrightarrow P_{S'}$

eine natürliche Transformation. Nach (4.3.1) existiert genau ein $\hat{\varphi}\colon \hat{S} \to \hat{S}'$, derart daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{S} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \hat{S}' \\ {\scriptstyle \zeta_{S,n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{S',n}} \\ S_n & \xrightarrow{\varphi_n} & S'_n \end{array}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ kommutativ ist. Die Eindeutigkeitsaussage über $\hat{\varphi}$ garantiert offensichtlich:

(3) $\wedge\colon S \mapsto \hat{S},\ \varphi \mapsto \hat{\varphi}$ ist ein Funktor $C \to C$.

Wir nennen $\wedge$ die formale Komplettierung.

(4) Nach (1) ist $\pi_S := (\pi_{S,n})_{n\in\mathbb{N}}\colon S \to P_S$ eine natürliche Transformation. Also existiert genau ein $i_S\colon S \to \hat{S}$ mit $\zeta_S \circ i_S = \pi_S$; i_S heißt die kanonische Inklusion. Man verifiziert leicht, daß

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & S' \\ {\scriptstyle i_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{S'}} \\ \hat{S} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \hat{S}' \end{array}$$

für jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ kommutativ ist.

(5) Im Fall der zugrundeliegenden Algebra R führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} \pi_n &:= \pi_{R,n} \\ \varphi_{nm} &:= \varphi_{R,nm} \\ \zeta_n &:= \zeta_{R,n} \\ i &:= i_R \quad . \end{aligned}$$

Es gelten dann die Beziehungen

$$\begin{aligned} \varphi_{nm} \circ \pi_m &= \pi_n \\ \varphi_{nm} \circ \zeta_m &= \zeta_n \\ \zeta_n \circ i &= \pi_n \quad , \end{aligned}$$

und i ist der Strukturmorphismus von $\hat{R}$ über R.

Die formale Komplettierung löst ein topologisches Problem, auf das wir kurz eingehen werden:

(7.3)Für $S \in |C|$ und $s \in |S|$ sei

$$v_{\mathfrak{s}}(s) := \sup\{\nu \in \{0\}\cup\mathbb{N} \mid s \in \mathfrak{s}^{\nu}\}$$

die Ordnung von s bzgl. $\mathfrak{s}$. Offensichtlich gelten die Aussagen

(1) $v_{\mathfrak{s}}(s) = \infty \langle ==> s = 0$

(2) $v_{\mathfrak{s}}(s_1 + s_2) \geq \min\{v_{\mathfrak{s}}(s_1), v_{\mathfrak{s}}(s_2)\}$

(3) $v_{\mathfrak{s}}(s_1 \cdot s_2) \geq v_{\mathfrak{s}}(s_1) \cdot v_{\mathfrak{s}}(s_2)$.

Also wird durch

$$d_S(s_1,s_2) := 2^{-v_{\mathfrak{s}}(s_1 - s_2)}$$

eine Metrik auf $|S|$ definiert, für die die strenge Dreiecksungleichung

(4) $d_S(s_1,s_3) \leq \max\{d_S(s_1,s_2), d_S(s_2,s_3)\}$

erfüllt ist, und $|S|$ ist bzgl. d_S ein metrischer Ring, d.h. es gilt

(5) $d_S(s_1 + s_3, s_2 + s_3) = d_S(s_1,s_2)$

(6) $d_S(s_\nu,s) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$, $d_S(\tilde{s}_\nu,\tilde{s}) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ ===> $d_S(s_\nu\tilde{s}_\nu, s\tilde{s}) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$.

(7.4)**Definition**

$S \in |C|$ heißt komplett genau dann, wenn $(|S|, d_S)$ ein kompletter metrischer Raum ist.

(7.5)**Definition**

Seien $S,\overline{S} \in |C|$, und sei $i \in \mathrm{Hom}_C(S,\overline{S})$. Das Paar $(\overline{S},i)$ heißt eine Komplettierung von S, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\overline{S}$ ist komplett

(2) i ist isometrisch (d.h. $d_{\overline{S}}(i(s),0) = d_S(s,0)\ \forall\, s \in |S|$)

(3) Ist $S' \in |C|$ komplett und $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$, so existiert genau ein $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_C(\overline{S},S')$ mit $\overline{\varphi} \circ i = \varphi$.

Existiert eine Komplettierung von S, so ist sie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Ohne Beweis geben wir die folgenden bekannten Aussagen an:

(7.6)Satz Für $S \in |C|$ sind äquivalent:
====
(1) S ist komplett
(2) $i_S: S \longrightarrow \hat{S}$ ist ein Isomorphismus.
(3) Zu jeder Folge $(s_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset |S|$ mit $s_{\nu+1} - s_\nu \in \mathfrak{s}^\nu$ existieren ein $s \in |S|$ und nichtnegative ganze Zahlen k_ν mit $k_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \infty$ und $s - s_\nu \in \mathfrak{s}^{k_\nu}$.

(7.7)Satz $(\hat{S}, i_S)$ ist Komplettierung von S im Sinne von (7.5).
====

(7.8)Mit (7.7) ist insbesondere bewiesen, daß $|\hat{R}|$ in der $\hat{\mathfrak{r}}$ - Topologie komplett ist. Ferner erhalten wir aus (7.6): ist S komplett, so ist (S, π_S) Limes von P_S (vgl. (7.2.4)). Als einfache Folgerung ergibt sich hieraus sofort:

(7.9)Corollar
========
Sei R noethersch und $\overline{T} \in |C_q\langle \hat{R} \rangle|$. Dann ist $(\pi_o(\overline{T}), \pi_{\pi_o(\overline{T})})$ Limes von $P_{\pi_o(\overline{T})}$.

(vgl. Zariski - Samuel [2], p.258, Corollary2).

(7.10)Satz Sei R semi-lokal und $\overline{T} \in |C_e\langle \hat{R} \rangle|$. Dann ist $(\pi_o(\overline{T}), \pi_{\pi_o(\overline{T})})$
====
Limes von $P_{\pi_o(\overline{T})}$.

Beweis:
$\hat{R}$ ist als Komplettierung einer semi-lokalen Algebra wieder semi-lokal (Zariski - Samuel [2], p.264, Corollary). Da $|\overline{T}|$ vermöge $\overline{\mathfrak{o}}$ ein endlicher $|\hat{R}|$-Modul ist, ist auch $|\overline{T}|$ semi-lokal und $\mathrm{rad}(\overline{\mathfrak{o}}(\hat{\mathfrak{r}}).|\overline{T}|)$ das Jacobson-Radikal von $|\overline{T}|$ (Zariski-Samuel [2], p.276, Theorem 15(d)).
Da $|\hat{R}|$ in der $\hat{\mathfrak{r}}$ - Topologie komplett ist, ist $|\overline{T}|$ als endlicher $|\hat{R}|$-Modul in der $\overline{\mathfrak{o}}(\hat{\mathfrak{r}}).|\overline{T}|$ - Topologie komplett (Zariski-Samuel [2], p. 276, Theorem 15(c)). Nun ist nach einem Satz von Chevalley (Zariski - Samuel [2], p.270, Theorem 13) die natürliche Topologie einer kompletten semi-lokalen Algebra schwächer als jede weitere hausdorffsche Idealtopologie. Unter Beachtung von (6.15.2) und $\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \overline{\mathfrak{q}}^\nu = (0)$ folgt also $\overline{\mathfrak{q}} \subset \mathrm{rad}(\overline{\mathfrak{o}}(\hat{\mathfrak{r}}).|\overline{T}|)$. Somit ist $|\overline{T}|$ in der $\overline{\mathfrak{q}}$ - Topologie komplett (Zariski - Samuel [2], p.275, Theorem 14), und die Behauptung ergibt sich aus (7.8).

Aus dem Beweis des vorangegangenen Satzes können wir eine einfache Folgerung ziehen:

(7.11) Corollar

Sei R lokal und $\overline{T} \in |C_e\langle\hat{R}\rangle|$ nicht die Null-Algebra. Dann ist $\overline{T}$ lokal.

Beweis:
In (7.10) ist die Beziehung $\overline{\mathfrak{q}} \subset \mathrm{rad}(\overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{w}}).|\overline{T}|)$ nachgewiesen worden. Da $\mathrm{rad}(\overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{w}}).|\overline{T}|)$ das Jacobson - Radikal von $|\overline{T}|$ ist, reicht es zum Nachweis von (7.11) offenbar zu zeigen, daß $\overline{\mathfrak{q}}$ ein maximales Ideal ist.
Wegen $\overline{T} \in |C_e\langle\hat{R}\rangle|$ existiert ein Epimorphismus $\hat{R}[x] \longrightarrow \overline{T}$, d.h. ein surjektiver Homomorphismus $\varepsilon: |\hat{R}|[x] \longrightarrow |\overline{T}|$ mit $\varepsilon(\hat{\mathfrak{w}},(x)) = \overline{\mathfrak{q}}$. Nun gilt $|\hat{R}|[x]/(\hat{\mathfrak{w}},(x)) \simeq |\hat{R}|/\hat{\mathfrak{w}}$, und $|\hat{R}|/\hat{\mathfrak{w}}$ ist ein Körper. Folglich ist der durch ε induzierte surjektive Homomorphismus $|\hat{R}|[x]/(\hat{\mathfrak{w}},(x)) \longrightarrow |\overline{T}|/\overline{\mathfrak{q}}$ ein Isomorphismus, womit die Maximalität von $\overline{\mathfrak{q}}$ gezeigt ist.

Wir verwenden (7.10) zur Berechnung weiterer Limites:

(7.12) Satz Sei R eine semi-lokale Algebra, K eine Kategorie und $\overline{\Delta} : K \to C_e\langle\hat{R}\rangle$ ein Diagramm vom Typ K in der Kategorie der endlichen $C\langle\hat{R}\rangle$ - Objekte. Wir definieren für $n,m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$:

$$P^{\overline{\Delta}}(n) := \Pi_1 \circ \mathfrak{Q}_{\zeta_n} \circ \overline{\Delta}$$

$$P^{\overline{\Delta}}(n,m) := \alpha_{\overline{\Delta},\varphi_{nm},\zeta_m}$$

(vgl.(3.6.2)). Dann gilt:

(1) $P^{\overline{\Delta}} : \mathbb{N}_c^o \longrightarrow [K,C]$ ist ein projektives System.

(2) $\gamma_{\overline{\Delta}} := (\gamma_{\overline{\Delta},\zeta_n})_{n\in\mathbb{N}} : \Pi_1(\overline{\Delta}) \longrightarrow P^{\overline{\Delta}}$ ist eine natürliche Transformation.

(3) $(\Pi_1(\overline{\Delta}),\gamma_{\overline{\Delta}})$ ist Limes von $P^{\overline{\Delta}}$.

Beweis:
(1): Gelte $n \leq m \leq l$, man hat

$$\alpha_{\overline{\Delta},\varphi_{ml},\zeta_l} \circ \alpha_{\overline{\Delta},\varphi_{nm},\zeta_m} = \alpha_{\overline{\Delta},\varphi_{ml},\zeta_l} \circ \alpha_{\overline{\Delta},\varphi_{nm},\varphi_{ml}\circ\zeta_l} =$$

(3.6.4)

$$= \alpha_{\overline{\Delta},\varphi_{nm}\circ\varphi_{m1},\zeta_1} = \alpha_{\overline{\Delta},\varphi_{n1},\zeta_1} .$$

Darüber hinaus gilt wegen $\varphi_{nn} = id$:

$$\alpha_{\overline{\Delta},\varphi_{nn},\zeta_n} = id_{\Pi_1(\otimes_{\zeta_n}\circ\overline{\Delta})} .$$

(2): Wegen $\varphi_{nm}\circ\zeta_m = \zeta_n$ folgt die Behauptung aus (3.6.3).

(3): Wir betrachten für $\overline{T} \in |C_e\langle\hat{R}\rangle|$ das durch

$$P^{\overline{T}}(n) := \Pi_o\circ\otimes_{\zeta_n}(\overline{T})$$

$$P^{\overline{T}}(n,m) := \alpha_{\overline{T},\varphi_{nm},\zeta_m}$$

$$(= (\beta_{\varphi_{nm},\zeta_m,\overline{T}})^{-1}\circ\gamma_{\otimes_{\zeta_m}(\overline{T}),\varphi_{nm}} \quad \text{analog (3.6.2)})$$

definierte projektive System $\mathbb{N}_c^o \to C$. Aus (4.5) ergibt sich unter Beachtung von

$$\Pi_1(\overline{\Delta})(j) = \Pi_o(\overline{\Delta}(j)) \quad \text{(vgl.(2.6) und (3.5))}$$

und $(\gamma_{\overline{\Delta}})_{n,j} = \gamma_{\hat{\overline{\Delta}}(j),\hat{R}_{n\zeta_n}}$ (vgl.(3.5)),

daß es zum Nachweis von (3) ausreicht, folgendes zu zeigen:

$$(\Pi_o(\overline{T}),(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}) \text{ ist Limes von } P^{\overline{T}} , \quad \gamma_n := \gamma_{\hat{\overline{T}},\hat{R}_{n\zeta_n}} .$$

Aus dem Beweis des Satzes (7.10) erhalten wir $\overline{\mathfrak{q}} \subset \mathrm{rad}(\overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{r}}).|\overline{T}|)$. Also existiert ein $e \in \mathbb{N}$ mit $\overline{\mathfrak{q}}^e \subset \overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{r}}).|\overline{T}|$. Es folgt

$$\overline{\mathfrak{q}}^{e.n} \subset (\overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{r}}).|\overline{T}|)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\ker\gamma_n \overset{(6.5)}{=} \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}}(\overline{\Theta}(\ker\zeta_n).|\overline{T}| + \overline{\mathfrak{q}}^\nu)$

$$= \overline{\Theta}(\ker\zeta_n).|\overline{T}|$$

$$= \overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{r}}^n).|\overline{T}|$$

$$= (\overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{r}}).|\overline{T}|)^n$$

existiert deshalb genau ein ξ_n: $|\overline{T}|/\overline{\mathfrak{q}}^{e.n} \to |\otimes_{\zeta_n}(\overline{T})|$ mit

1. $\xi_n\circ\tau_{\Pi_o(\overline{T}),e.n} = \gamma_n$.

Andererseits gilt p.d. $\overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{r}}) \subset \overline{\mathfrak{q}}$ und somit

$$(\overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{r}}).|\overline{T}|)^n \subset \overline{\mathfrak{q}}^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} ,$$

also gibt es genau ein ξ_n': $|\otimes_{\zeta_n}(\overline{T})| \to |\overline{T}|/\overline{\mathfrak{q}}^n$ mit

2. $\xi'_n \circ \gamma_n = \pi_{\Pi_0(\overline{T}),n}$.

Wir wollen (4.8) auf die projektiven Systeme $P := P_{\Pi_0(\overline{T})}$, $P' := P^{\overline{T}}$ und das durch die Funktion $f: n \mapsto e.n$ bestimmte projektive System P_f anwenden (vgl.(4.7)). Aus 1. und 2. folgert man leicht, daß durch $\xi := (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\xi' := (\xi'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürliche Transformationen $P_f \to P'$ bzw. $P' \to P$ definiert werden und diese Transformationen die Bedingungen

3. $\xi'_n \circ \xi_n = \varphi_{\Pi_0(\overline{T}),n,e.n}$

4. $\xi_n \circ \xi'_{e.n} = \alpha_{\overline{T},\varphi_{n,e.n},\zeta_{e.n}}$

erfüllen. Aus (4.8) und (7.10) erhalten wir das Paar

$$(\Pi_0(\overline{T}),(\xi_n \circ \pi_{\Pi_0(\overline{T})e.n})_{n\in\mathbb{N}})$$

als Limes von P'. Mit 1. folgt die Behauptung.

(7.13)Corollar

Sei R noethersch, K eine Kategorie und $\overline{\Delta}: K \to C_q\langle\hat{R}\rangle$ ein Diagramm vom Typ K in der Kategorie der Quotienten von $\hat{R}$. Definieren wir $P^{\overline{\Delta}}$ wie in (7.12), so gelten die Aussagen des Satzes (7.12).

Beweis:
Unter den angegebenen Voraussetzungen können wir im vorangegangenen Beweis (7.9) anstelle von (7.10) anwenden. Eine Bezugnahme auf (4.8) ist nicht erforderlich, denn offenbar hat man $\ker\gamma_n = \overline{4}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(7.14)Corollar

Sei K eine Kategorie. Wir setzen voraus:

(1) R ist eine semi-lokale Algebra, und $\overline{\Delta}_0$, $\overline{\Delta}$ sind Diagramme vom Typ K in $C_e\langle\hat{R}\rangle$

o d e r

(2) R ist noethersch, und $\overline{\Delta}_0$, $\overline{\Delta}$ sind Diagramme vom Typ K in $C_q\langle\hat{R}\rangle$.

Gegeben seien $n_o \in \mathbb{N}$ und für $n \geq n_o$ $\tilde{C}$-Morphismen

$$\delta_n : \Pi(\otimes_{\zeta_n} \circ \bar{\Delta}_o) \longrightarrow \Pi(\otimes_{\zeta_n} \circ \bar{\Delta}),$$

derart daß die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Pi(\otimes_{\zeta_{n+1}} \circ \bar{\Delta}_o) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & \Pi(\otimes_{\zeta_{n+1}} \circ \bar{\Delta}) \\ \downarrow \alpha_{\bar{\Delta}_o, n} & & \downarrow \alpha_{\bar{\Delta}, n} \\ \Pi(\otimes_{\zeta_n} \circ \bar{\Delta}_o) & \xrightarrow{\delta_n} & \Pi(\otimes_{\zeta_n} \circ \bar{\Delta}) \end{array}$$

für $n \geq n_o$ kommutativ sind; $\alpha_{\bar{\Delta}, n} := \alpha_{\bar{\Delta}, \varphi_{n,n+1}, \zeta_{n+1}}$.

Dann existiert ein $\delta : \Pi(\bar{\Delta}_o) \longrightarrow \Pi(\bar{\Delta})$, so daß

$$\begin{array}{ccc} \Pi(\bar{\Delta}_o) & \xrightarrow{\delta} & \Pi(\bar{\Delta}) \\ \downarrow \gamma_{\bar{\Delta}_o, n_o} & & \downarrow \gamma_{\bar{\Delta}, n_o} \\ \Pi(\otimes_{\zeta_{n_o}} \circ \bar{\Delta}_o) & \xrightarrow{\delta_{n_o}} & \Pi(\otimes_{\zeta_{n_o}} \circ \bar{\Delta}) \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis:
Unter den Voraussetzungen (1) bzw. (2) sind (7.12) bzw. (7.13) anwendbar. Offensichtlich folgt dann die Behauptung aus diesen Sätzen unter Zuhilfenahme von (4.6.2), (4.7.1) - angewandt auf $f(n) := n + n_o$ - und (4.3.1).

8. Induktive Limites in C und ausschöpfende Funktoren

(8.1) Satz Jedes induktive System $I: M_c \longrightarrow C$ besitzt einen Limes.

Beweis:

Nach (4.10) reicht es zu zeigen, daß jedes induktive System $\bar{I}: M_c \longrightarrow \bar{C}$ einen Limes besitzt.

Wir schreiben $\bar{I}(\lambda) = (|S_\lambda|, \mathfrak{s}_\lambda)$ und $\bar{I}(\lambda,\mu) = \varphi_{\lambda\mu}$. Bekanntlich besitzt das durch

$$\bar{I}: \lambda \longmapsto |S_\lambda|, \quad (\lambda,\mu) \longmapsto \varphi_{\lambda\mu}$$

definierte induktive System $\bar{I}: M_c \longrightarrow k\text{-Alg}$ einen Limes $(A, \bar{\eta})$. Wegen $\varphi_{\lambda\mu}(\mathfrak{s}_\lambda) \subset \mathfrak{s}_\mu$ ist

$$\mathfrak{a} := \bigcup_{\lambda \in M} \bar{\eta}_\lambda(\mathfrak{s}_\lambda)$$

ein Ideal in A; es sei

$$\mathfrak{a}_0 := \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}^\nu ,$$

$$\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{a}_0 =: |S| \text{ die Projektion}$$

und $\mathfrak{s} := \pi(\mathfrak{a})$.

Aus $\ker\pi \subset \mathfrak{a}^\nu \ \forall \nu$ folgt

$$\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \mathfrak{s}^\nu = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \pi(\mathfrak{a}^\nu) = \pi\Big(\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}^\nu\Big) = \pi(\mathfrak{a}_0) = (0)$$

(vgl.(5.6.iii)). Also ist $\bar{S} := (|S|, \mathfrak{s})$ eine (k,0)-Algebra. Wir definieren $\eta_\lambda := \pi \circ \bar{\eta}_\lambda$; offensichtlich gilt $\eta_\lambda(\mathfrak{s}_\lambda) \subset \mathfrak{s} \ \forall \lambda$, und $\eta : \bar{I} \longrightarrow \bar{S}$ ist eine natürliche Transformation. Wir behaupten, daß $(\bar{S}, \eta)$ ein Limes von $\bar{I}$ ist!

Sei $\xi : \bar{I} \longrightarrow \bar{S}'$ eine natürliche Transformation. Da $(A, \bar{\eta})$ Limes von $\bar{I}$ ist, existiert genau ein $\bar{\varphi}: A \longrightarrow |S'|$ mit $\bar{\varphi} \circ \bar{\eta} = \xi$. Es gilt

$$\bar{\varphi}(\mathfrak{a}_0) = \bar{\varphi}\Big(\bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}^\nu\Big) \subset \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} (\bar{\varphi}(\mathfrak{a}))^\nu$$

$$= \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \Big(\bar{\varphi}\Big(\bigcup_{\lambda \in M} \bar{\eta}_\lambda(\mathfrak{s}_\lambda)\Big)\Big)^\nu = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \Big(\bigcup_{\lambda \in M} \bar{\varphi} \circ \bar{\eta}_\lambda(\mathfrak{s}_\lambda)\Big)^\nu$$

$$= \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \Big(\bigcup_{\lambda \in M} \xi_\lambda(\mathfrak{s}_\lambda)\Big)^\nu \subset \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}} \mathfrak{s}'^\nu = (0) .$$

Also existiert genau ein $\varphi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(|S|,|S'|)$ mit $\varphi\circ\pi = \overline{\varphi}$. Diese Beziehung hat offenbar $\varphi(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}'$ und damit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\tilde{S},\tilde{S}')$ zur Folge. Ferner ergibt sich $\varphi\circ\eta = \varphi\circ\pi\circ\overline{\eta} = \overline{\varphi}\circ\overline{\eta} = \xi$. Wegen $\tilde{\varphi}\circ\eta = \xi \implies \tilde{\varphi}\circ\pi\circ\overline{\eta} = \overline{\varphi}\circ\overline{\eta} \implies \tilde{\varphi}\circ\pi = \overline{\varphi} \implies \tilde{\varphi} = \varphi$ ist φ darüber hinaus durch $\varphi\circ\eta = \xi$ eindeutig bestimmt.

(8.2)Anmerkung

Das in vorangegangenem Beweis auftretende Ideal σ_0 ist i.a. vom Nullideal verschieden, wie es das nachfolgende Beispiel (8.3) zeigt. Dies impliziert, daß sich die bei der Konstruktion von $(A,\overline{\eta})$ ergebende Beziehung

(1) $\ker \overline{\eta}_\lambda = \{\, s_\lambda \in |S_\lambda| \mid \exists\, \mu \geq \lambda : \varphi_{\lambda\mu}(s_\lambda) = 0 \,\}$

nicht auf die Homomorphismen η_λ überträgt. Hingegen hat die in k-Alg trivialerweise gültige Gleichung

(2) $A = \bigcup_{\lambda\in M} \overline{\eta}_\lambda(|S_\lambda|)$

das Analogon

(2') $|S| = \bigcup_{\lambda\in M} \eta_\lambda(|S_\lambda|)$

in C zur Folge.

(8.3)Beispiel

Es sei $M = \mathbb{N}$, $|S_n| := k[t]$ der Polynomring über k in einer Unbestimmten t, $\mathfrak{s}_n := (t)$ und $\tilde{S}_n := (|S_n|,\mathfrak{s}_n)$.
Für $m \geq n$ legen wir $\varphi_{nm}\colon \tilde{S}_n \longrightarrow \tilde{S}_m$ durch

$$\varphi_{nm}(t) := t^{2^{m-n}}$$

fest. Dann gilt

(1) $\varphi_{nn}(t) = t$

(2) $\varphi_{ml}\circ\varphi_{nm}(t) = \varphi_{ml}(t^{2^{m-n}}) = (\varphi_{ml}(t))^{2^{m-n}} = (t^{2^{l-m}})^{2^{m-n}}$

$$= t^{2^{l-m+m-n}} = t^{2^{l-n}} = \varphi_{nl}(t)\ ,$$

also $\varphi_{ml}\circ\varphi_{nm} = \varphi_{nl}$.

Somit wird durch

$$\tilde{I}\colon n \longmapsto \tilde{S}_n\ ,\ (n,m) \longmapsto \varphi_{nm}$$

ein induktives System in $\tilde{C}$ definiert. Sei $(\tilde{S},\eta)$ ein Limes von $\tilde{I}$ und $(A,\overline{\eta})$ ein Limes des zugrundeliegenden induktiven Systems in k-Alg. Wegen (8.2.1) ist insbesondere $\overline{\eta}_1$ injektiv, so daß A eine zum Polynomring $k[t]$ isomorphe Unteralgebra enthält. A ist also sicherlich nicht k-isomorph zu k. Hingegen gilt

(3) $\tilde{S} \simeq (k,0)$.

Zum Nachweis von (3) zeigen wir:

(4) $\eta_n(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(5) $1 \neq 0$ in $|S|$.

Die Behauptung (4) folgt offensichtlich aus

$$\begin{aligned}\eta_n(t) &= \eta_m \circ \varphi_{nm}(t)\\ &= \eta_m(t^{2^{m-n}})\\ &\in \eta_m(\mathfrak{s}_m^{2^{m-n}})\\ &\subset (\eta_m(\mathfrak{s}_m).|S|)^{2^{m-n}}\\ &\subset \mathfrak{s}^{2^{m-n}} \quad \forall m \geq n.\end{aligned}$$

Beweis der Aussage (5): Aus dem Beweis von (8.1) schließen wir, daß $|S|$ nur dann der Nullring ist, wenn

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\eta}_n(\mathfrak{s}_n) = A .$$

In diesem Fall existieren zu $1 \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Element $s_n \in \mathfrak{s}_n$ mit $\overline{\eta}_n(s_n) = 1$. Es folgt $\overline{\eta}_n(s_n - 1) = 0$, also

$$\varphi_{nm}(s_n - 1) = \varphi_{nm}(s_n) - 1 = 0 \text{ für ein } m \geq n$$

nach (8.2.1). Dies hat jedoch $1 \in \mathfrak{s}_m$ und somit $|S_m| = 0$ zur Folge, ein Widerspruch.

Wir betrachten i.f. spezielle induktive Systeme:

(8.4)(1) Seien $S,S_1 \in |C|$. S_1 heißt eine R-Unteralgebra von S, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(i) $|S_1|$ ist eine k-Unteralgebra von $|S|$
(ii) $\mathfrak{s}_1 \subset \mathfrak{s}$
(iii) $\sigma_1(r) = \sigma(r) \quad \forall r \in |R|$.
Wir schreiben in diesem Fall kurz $S_1 \subset S$ und bezeichnen mit $i_{S_1,S} \in \mathrm{Hom}_C(S_1,S)$ die natürliche Inklusion.

(2) Für $S \in |C|$ sei

$M(S) := \{S_1 \in |C|\,|\, S_1$ R-Unteralgebra von endlichem Typ$\}$.

Offensichtlich ist $M(S) \neq 0$, und die in (1) erklärte Relation $\subset$ definiert eine aufsteigend gerichtete Ordnung auf $M(S)$. Folglich wird durch

$$I_S(S_1) := S_1 \qquad (S_1 \in M(S))$$

$$I_S(S_1,S_2) := i_{S_1,S_2} \qquad (S_1,S_2 \in M(S),\ S_1 \subset S_2)$$

ein induktives System $I_S\colon M(S)_c \longrightarrow C$ definiert.

(3) Für $S_1 \in M(S)$ sei

$$\eta_{S_1} := i_{S_1,S_2}\ .$$

Trivialerweise ist $\eta := (\eta_{S_1})_{S_1 \in M(S)} : I_S \longrightarrow S$ eine natürliche Transformation. Wir zeigen:

(4) **Lemma**

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) (S,η) **ist Limes von** I_S

(ii) $|S| = \mathfrak{G}(|R|) + \aleph_0$.

Beweis:

(i) ===> (ii):

Sei $s \in |S|$ gegeben. Da (S,η) Limes von I_S ist, existieren ein $S_1 \in M(S)$ und ein $s_1 \in |S_1|$ mit $\eta_{S_1}(s_1) = s$ (vgl. (8.2.2')); m.a.W.: $s \in |S_1|$ für geeignetes $S_1 \in M(S)$. Sei $\varepsilon\colon R[x] \longrightarrow S_1$ ein Epimorphismus und $\sum r_\nu x^\nu$ ein Urbild von s. Dann folgt

$$\begin{aligned} s &= \varepsilon(r_{(0,\dots,0)}) + \varepsilon\Big(\sum_{|\nu|>0} r_\nu x^\nu\Big) \\ &= \mathfrak{G}_1(r_{(0,\dots,0)}) + \sum_{|\nu|>0} \mathfrak{G}_1(r_\nu)\cdot\varepsilon(x_1)^{\nu_1} \cdot\dots\cdot \varepsilon(x_N)^{\nu_N} \\ &\in \mathfrak{G}(|R|) + \aleph_0 . \end{aligned}$$

(ii) ===> (i):

Sei (S^*,η^*) ein Limes von I_S (vgl.(8.1)). Zur natürlichen Transformation $\eta\colon I_S \longrightarrow S$ existiert dann genau ein $\varphi\colon S^* \longrightarrow S$ mit $\varphi\circ\eta^* = \eta$. Wir zeigen, daß φ ein Isomorphismus ist; trivialerweise folgt hieraus die Behauptung.

(a) φ ist injektiv:
Sei $\varphi(s^*) = 0$. Zu s^* existieren ein $S_1 \in M(S)$ und ein $s_1 \in |S_1|$ mit $\eta^*_{S_1}(s_1) = s^*$. Es folgt $0 = \varphi \circ \eta^*_{S_1}(s_1) = \eta_{S_1}(s_1)$ und somit $s_1 = 0$; ===> $s^* = 0$.

(b) φ ist surjektiv:
Sei $s \in |S|$ gegeben. Nach Voraussetzung existieren ein $r \in |R|$ und ein $s_1 \in \mathfrak{s}$ mit $s = \sigma(r) + s_1$. Wegen $s_1 \in \mathfrak{s}$ gilt
$S_1 := (\sigma(|R|)[s_1], (\sigma(r) \cup \{s_1\}).\sigma(|R|)[s_1])_\sigma \in M(S)$;
also zeigt $s = \eta_{S_1}(s) = \varphi \circ \eta^*_{S_1}(s)$ die Surjektivität von φ.

(c) $\varphi(\mathfrak{s}^*) = \mathfrak{s}$
ist offensichtlich erfüllt.

(5) Corollar
========
$(\hat{R}, \eta)$ ist Limes von $I_{\hat{R}}$.

Beweis:
Sei $\bar{r} \in |\hat{R}|$ gegeben. Zu $\zeta_1(\bar{r}) \in |R_1|$ existiert ein $r \in |R|$ mit $\tau_1(r) = \zeta_1(\bar{r})$. Es folgt

$$0 = \zeta_1(\bar{r}) - \tau_1(r) = \zeta_1(\bar{r} - i(r)),$$

also $\bar{r} - i(r) \in \ker\zeta_1 = \hat{\mathfrak{r}}$. Lemma (4) liefert das Gewünschte.

(6) Nach (4.11) und (5) ist jedem Funktor $H: C \longrightarrow Ens$ eine kanonische Abbildung

$$\chi_{H, I_{\hat{R}}} : \varinjlim H \circ I_{\hat{R}} \longrightarrow H(\hat{R})$$

zugeordnet. Wir schreiben i.f. kurz $\chi_H := \chi_{H, I_{\hat{R}}}$.

(8.5) Definition
==========
Ein Funktor $H: C \longrightarrow Ens$ heißt ausschöpfend genau dann, wenn χ_H surjektiv ist.

(8.6) Anmerkung
==========
Nach Grothendieck heißt ein Funktor $H: A\text{-Alg} \longrightarrow Ens$ $(A \in |k\text{-Alg}|)$ lokal endlich präsentiert, wenn die kanonische Abbildung $\varinjlim H \circ I \longrightarrow H(\varinjlim I)$ für jedes induktive System $I: M_C \longrightarrow A\text{-Alg}$ bijektiv ist (vgl. M.Artin [3], p.24, Definition(1.5)). Diese Endlichkeitsbedingung für Funktoren spielt bei Algebraisierungsproblemen in A-Alg eine wichtige Rolle (M.Artin [3], p.26,

Theorem (1.12); [5],p.25,Theorem (1.6); etc.). Aus mehreren Gründen erscheint es jedoch nicht sinnvoll, im Zusammenhang mit dem einleitend gestellten Problem den formal gleichen Begriff zu verwenden; die Rolle lokal endlich präsentierter Funktoren übernehmen hier die ausschöpfenden Funktoren.

(8.7)Lemma Für $S^* \in |C|$ sei $H^{S^*}: C \longrightarrow$Ens der durch

$$H^{S^*}(S) := \mathrm{Hom}_C(S^*,S) \quad (S \in |C|)$$

$$H^{S^*}(\varphi)(\psi) := \varphi \circ \psi \quad (\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S'), \psi \in H^{S^*}(S))$$

definierte (covariante) Hom-Funktor. Ist S^* von endlichem Typ, so ist H^{S^*} ausschöpfend.

Beweis:
Nach (4.11.1) ist folgendes zu verifizieren:

$$\forall \varphi \in H^{S^*}(\hat{R})\ \exists S_1 \in M(\hat{R}) \wedge \varphi_1 \in H^{S^*}(S_1): \gamma_{S_1} \circ \varphi_1 = \varphi .$$

Nun gilt offensichtlich $S_1 := (\varphi(|S^*|),\varphi(\sigma^*))_{\varphi \circ \sigma^*} \in M(\hat{R})$, denn S^* ist von endlichem Typ. Also hat der punktweise mit φ identische Homomorphismus $\varphi_1: S^* \longrightarrow S_1$ die gesuchte Eigenschaft.

(8.8)Anmerkung

Aufgrund der speziellen Struktur des induktiven Systems $I_{\hat{R}}$ benötigt man beim Nachweis der Surjektivität von $\chi_{H^{S^*}}$ nicht, daß S^* endlich präsentiert ist. Dies wäre - wie man sich leicht überlegt - eine notwendige Forderung beim Beweis der Surjektivität von $\chi_{H^{S^*},I}$ für allgemeinere Systeme I.

(8.9)Satz Sei H: C$\longrightarrow$Ens ein Funktor. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) H ist ausschöpfend.

(2) Zu jedem $\bar{\omega} \in H(\hat{R})$ existieren

(i) eine R-Algebra $S(\bar{\omega})$ von endlichem Typ

(ii) eine natürliche Transformation $\tau^{\bar{\omega}}: H^{S(\bar{\omega})} \longrightarrow H$

(iii) ein Element $\omega \in H^{S(\bar{\omega})}(\hat{R})$ mit $\tau^{\bar{\omega}}_{\hat{R}}(\omega) = \bar{\omega}$.

Beweis:
(1) ===> (2):
Sei $\bar{\omega} \in H(R)$ gegeben. Da χ_H surjektiv ist, existieren ein

$S(\overline{\omega}) \in M(\hat{R})$ und ein Element $\omega_o \in H(S(\overline{\omega}))$ mit $H(\eta_{S(\overline{\omega})})(\omega_o) = \overline{\omega}$. Wir legen $\tau^{\overline{\omega}}: H^{S(\overline{\omega})} \longrightarrow H$ wie folgt fest: für $S \in |C|$ und $\Psi \in H^{S(\overline{\omega})}(S)$ sei $\tau^{\overline{\omega}}_S(\Psi) := H(\Psi)(\omega_o)$. Dies ist in der Tat eine natürliche Transformation, denn für $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ gilt

$$(H(\varphi)\circ\tau^{\overline{\omega}}_S)(\Psi) = H(\varphi\circ\Psi)(\omega_o) = \tau^{\overline{\omega}}_{S'}(\varphi\circ\Psi)$$
$$= (\tau^{\overline{\omega}}_{S'}\circ H^{S(\overline{\omega})}(\varphi))(\Psi).$$

Für $\omega := \eta_{S(\overline{\omega})}$ folgt schließlich

$$\tau^{\overline{\omega}}_{\hat{R}}(\omega) = H(\eta_{S(\overline{\omega})})(\omega_o) = \overline{\omega}\ .$$

(2) ===> (1):
Es ist zu zeigen, daß zu jedem $\overline{\omega} \in H(R)$ ein $S \in M(\hat{R})$ und ein $\omega_o \in H(S)$ mit $H(\eta_S)(\omega_o) = \overline{\omega}$ existieren.
Wir wählen zu $\overline{\omega}$ Größen $S(\overline{\omega}), \tau^{\overline{\omega}}, \omega$ mit (i),(ii) und (iii). Nach (8.7) ist $H^{S(\overline{\omega})}$ ausschöpfend; zu ω existieren somit ein $S \in M(\hat{R})$ und ein $\omega_1 \in H^{S(\overline{\omega})}(S)$ mit $H^{S(\overline{\omega})}(\eta_S)(\omega_1) = \omega$. Für $\omega_o := \tau^{\overline{\omega}}_S(\omega_1) \in H(S)$ folgt

$$H(\eta_S)(\omega_o) = H(\eta_S)\circ\tau^{\overline{\omega}}_S(\omega_1) = \tau^{\overline{\omega}}_{\hat{R}}\circ H^{S(\overline{\omega})}(\eta_S)(\omega_1)$$
$$= \tau^{\overline{\omega}}_{\hat{R}}(\omega) = \overline{\omega}\ .$$

Wir geben abschließend eine einfache Konstruktion an, die in Abschnitt 15 benötigt wird.

(8.10) Sei $S \in |C|$ und $G: C\langle S\rangle \longrightarrow$ Ens ein Funktor. Wir erklären mittels G einen Funktor $G^*: C \longrightarrow$ Ens wie folgt
Für $S' \in |C|$ sei

$$G^*(S') := \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')} G(\tilde{S}'_\varphi)$$

die direkte Summe der Familie $(G(\tilde{S}'_\varphi))_{\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')}$ von Mengen. Mit $\iota_\varphi: G(\tilde{S}'_\varphi) \longrightarrow G^*(S')$ bezeichnen wir die natürliche Inklusion.
Sei $\Psi \in \mathrm{Hom}_C(S',S'')$; für jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ kann Ψ als Element der Homomorphismenmenge $\mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(S'_\varphi, S''_{\Psi\circ\varphi})$ angesehen

werden. Zur Familie $(\iota_{\psi\circ\varphi}\circ G(\psi))_{\varphi\in \mathrm{Hom}_C(S,S')}$ von Abildungen $\iota_{\psi\circ\varphi}\circ G(\psi)\colon G(S'_\varphi)\longrightarrow G^*(S'')$ existiert genau eine Abbildung $G^*(\psi)\colon G^*(S')\longrightarrow G^*(S'')$ mit

$$G^*(\psi)\circ\iota_\varphi = \iota_{\psi\circ\varphi}\circ G(\psi) \quad \forall\,\varphi\in \mathrm{Hom}_C(S,S').$$

Man verifiziert leicht, daß durch

$$G^* : S' \longmapsto G^*(S') \,,\psi \longmapsto G^*(\psi)$$

ein Funktor $C\longrightarrow$Ens definiert wird.

(1) Wir nennen einen Funktor $G\colon C\langle S\rangle\longrightarrow$Ens ausschöpfend genau dann, wenn der zugeordnete Funktor $G^*\colon C\longrightarrow$Ens ausschöpfend im Sinne von (8.5) ist.

Diese Definition ist sinnvoll; identifizieren wir nämlich im Falle $S = R$ die Kategorie $C\langle S\rangle$ mit C, so stimmt G^* offensichtlich mit G überein. Denn $\mathrm{Hom}_C(R,S')$ enthält nur den Strukturmorphismus von S' über R.

III. Formale Algebraisierung

9. Datensysteme

(9.1) Es sei $\hat{R}$ die formale Komplettierung von R, $i: R \to \hat{R}$ der Strukturmorphismus von $\hat{R}$ über R, $R_n = R/\mathfrak{r}^n$, $\pi_n: R \to R_n$ die Projektion und $\zeta_n: \hat{R} \to R_n$ der natürliche Homomorphismus; vgl. (7.2.5). Ferner sei $\underline{B}_o$ ein fest vorgegebenes Unterkategoriensystem des Basiswechsels über R. Wir wenden uns der Untersuchung folgender Frage zu:

(1) Sei $\overline{T}_o \in |C_o\langle\hat{R}\rangle|$ gegeben. Existiert ein $T_o \in |C_o\langle R\rangle|$ mit

$$\widetilde{\otimes_i(T_o)} \simeq \tilde{\overline{T}}_o \quad ?$$

Das einleitend gestellte Problem der lokalen Algebraisierbarkeit eines komplexen Raumes ordnet sich dieser Frage unter, wie wir in Kapitel V ausführen werden.
Bei der zu besprechenden Lösungsmethode für (1) gehen wir davon aus, daß uns - in noch zu beschreibender Weise - ein Kriterium (×) der folgenden Art vorgegeben ist:

(2) Sei $\overline{T} \in |C_o\langle\hat{R}\rangle|$ und $\psi: \tilde{\overline{T}}_o \to \tilde{\overline{T}}$ ein Homomorphismus. Erfüllt ψ das Kriterium (×), so ist ψ ein Isomorphismus.

Aufgabe ist es dann, die Frage

(3) Existiert ein $T_o \in |C_o\langle R\rangle|$ derart, daß ein Homomorphismus $\psi: \tilde{\overline{T}}_o \to \widetilde{\otimes_i(T_o)}$ mit (×) angegeben werden kann?

zu beantworten.

(9.2) Wir geben die zur Darstellung eines Kriteriums (×) benötigten Größen vor:

(1) ein Kategoriensystem $\underline{K}$ über C

(2) eine Kategorie K^*

(3) einen Morphismus $\overline{\Phi}: \underline{K} \to [K^*, \underline{B}_o]$

(4) ein Objekt $O \in |K^*|$ und den durch O festgelegten Morphismus $\overline{\Phi}^*: [K^*, \underline{B}_o] \to \underline{B}_o$ (vgl.(3.8))

(5) eine Teilmenge $E \subset |K(\hat{R})|$ mit der Eigenschaft

$$\overline{\Delta} \in E,\ \overline{\Delta}_1 \in |K(\hat{R})|,\ \overline{\Delta} \simeq \overline{\Delta}_1 \implies \overline{\Delta}_1 \in E$$

(6) ein Objekt $\bar{\Delta}_o \in E$ mit $\Phi^*_{\hat{R}} \circ \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o) = \bar{T}_o$

(7) eine natürliche Zahl n_o .

Die Objekte der Kategorie K(S) nennen wir Daten für S-Algebren. Gilt speziell $\Phi^*_S \circ \Phi_S(\Delta) = T$, so heißt Δ ein Datum für T.

Durch (6) ist also insbesondere ein Datum für die zu untersuchende Algebra $\bar{T}_o$ gegeben.

(9.3) Sei $\bar{\Delta} \in |K(\hat{R})|$ ein Datum für $\bar{T} \in |C_o\langle\hat{R}\rangle|$ und $\Psi: \bar{T}_o \longrightarrow \tilde{\bar{T}}$ ein $\bar{C}$ - Morphismus. Wir bringen Ψ und die Daten $\bar{\Delta}_o, \bar{\Delta}$ auf folgendem Weg in Zusammenhang:

(1) Sei $\mathcal{T}: \mathrm{Ass}[K^*, \underline{B}_o] \longrightarrow [K^*, \bar{C}]$ der in (3.9) angegebene Funktor. Es existiere ein Morphismus

$$\delta: \mathcal{T} \circ \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o) \longrightarrow \mathcal{T} \circ \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta})$$

mit $\delta_0 = \Psi$.

(2) Wir betrachten die Daten $\bar{\Delta}_o, \bar{\Delta}$ " mod $\hat{\mathfrak{w}}^n$ ", d.h. die Daten $F_{\zeta_n}(\bar{\Delta}_o), F_{\zeta_n}(\bar{\Delta})$: Sei

$$\delta': F_{\zeta_n}(\bar{\Delta}_o) \longrightarrow F_{\zeta_n}(\bar{\Delta})$$

ein $K(R_n)$ - Morphismus. δ' liefert bei Anwendung von Φ_{R_n} den Morphismus

$$\Phi_{R_n}(\delta'): \Phi_{R_n} \circ F_{\zeta_n}(\bar{\Delta}_o) \longrightarrow \Phi_{R_n} \circ F_{\zeta_n}(\bar{\Delta}) ,$$

also den Morphismus

$$\Phi_{R_n}(\delta'): \otimes_{\zeta_n} \circ \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o) \longrightarrow \otimes_{\zeta_n} \circ \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}) .$$

Durch Anwendung von $\mathcal{T}_o \circ J_{R_n}$ erhalten wir hieraus nach (3.5) den Morphismus

$$\mathcal{T}_o \circ J_{R_n} \circ \Phi_{R_n}(\delta'): \mathcal{T}_1(\otimes_{\zeta_n} \circ \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o)) \longrightarrow \mathcal{T}_1(\otimes_{\zeta_n} \circ \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta})) .$$

Unter Beachtung von (2.6.2) ist somit

$$\Phi_{R_n}(\delta') \in \mathrm{Hom}_{[K^*, C]}(\mathcal{T}_1(\otimes_{\zeta_n} \circ \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o)), \mathcal{T}_1(\otimes_{\zeta_n} \circ \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}))) .$$

Nach (3.6) liegen andererseits die $[K^*, C]$ - Morphismen

$$\gamma_{\Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o), \zeta_n}: \mathcal{T}_1(\Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o)) \longrightarrow \mathcal{T}_1(\otimes_{\zeta_n} \circ \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o))$$

und

$\gamma_{\phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}),\zeta_n} : \mathbb{T}_1(\phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta})) \longrightarrow \mathbb{T}_1(\otimes_{\zeta_n} \circ \phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}))$

vor. Wir können also nach Anwendung von $\tilde{\mathbb{T}}$(vgl.(3.9)) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}(\phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o)) & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathbb{T}(\phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta})) \\ \Big\downarrow \gamma_{\phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o),\zeta_n} & & \Big\downarrow \gamma_{\phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}),\zeta_n} \\ \mathbb{T}(\otimes_{\zeta_n} \circ \phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o)) & \xrightarrow[\phi_{R_n}(\delta')]{} & \mathbb{T}(\otimes_{\zeta_n} \circ \phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta})) \end{array}$$

betrachten. Ist es kommutativ, so sagen wir kurz: δ induziert $\phi_{R_n}(\delta')$.

(3) Sei speziell $n = n_o$ (vgl.(9.2.7)). Es existiere ein Isomorphismus $\delta' : F_{\zeta_{n_o}}(\bar{\Delta}_o) \longrightarrow F_{\zeta_{n_o}}(\bar{\Delta})$ derart, daß δ den Morphismus $\phi_{R_{n_o}}(\delta')$ induziert.

(4) Die Forderungen (1) und (3) betreffen die funktoriellen Voraussetzungen des gesuchten Kriteriums ($\times$). Aus (1) und (3) wird man i.a. noch nicht folgern können, daß Ψ ein Isomorphismus ist. Dies soll jedoch dann der Fall sein, wenn das mit $\bar{\Delta}_o$ zu vergleichende Datum $\bar{\Delta}$ gewisse zusätzliche Eigenschaften besitzt. Diese Eigenschaften werden durch die in (9.2.5) angegebene Menge $E \subset |K(\hat{R})|$ charakterisiert; wir denken dabei z.B. an Bedingungen der Art

$$E = \{\bar{\Delta} \in |K(\hat{R})| \mid \dim \phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta})(j) = \dim \phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o)(j)\ \forall j \in |K^*|\},$$

falls es sich um lokale Algebren handelt (vgl.(7.11)).

(9.4) Definition

Die Familie $(\underline{K}, K^*, \underline{\Phi}, \Phi^*, E, \bar{\Delta}_o, n_o)$ der in (9.2.1)-(9.2.7) spezifizierten Größen heißt ein Datensystem für $\bar{\mathbb{T}}_o$, wenn das folgende Isomorphiekriterium ($\times$) erfüllt ist:

($\times$) Sei $\bar{\mathbb{T}} \in |C_o\langle\hat{R}\rangle|$ und $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(\bar{\mathbb{T}}_o, \bar{\mathbb{T}})$. Es existiere ein Datum $\bar{\Delta} \in E$ für $\bar{\mathbb{T}}$, ein Morphismus

$$\delta\colon \mathbb{T}\circ\phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}_o) \to \mathbb{T}\circ\phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta})$$

mit $\delta_0 = \Psi$ und ein Isomorphismus

$$\delta'\colon F_{\zeta_{n_o}}(\bar{\Delta}_o) \to F_{\zeta_{n_o}}(\bar{\Delta})$$

derart, daß δ den Morphismus $\phi_{R_{n_o}}(\delta')$ induziert.

Dann ist Ψ ein Isomorphismus.

In Kapitel V werden wir Beispiele für Datensysteme angeben. Es sei $(\underline{K},K^*,\Phi,\Phi^*,E,\bar{\Delta}_o,n_o)$ ein Datensystem für $\bar{T}_o$. Zur Lösung des Problems (9.1.3) versuchen wir, die durch $\bar{\Delta}_o$ über $\hat{R}$ gegebene Struktur zu approximieren. Wir benötigen:

(9.5)**Definition**

Sei $H\colon C \longrightarrow \mathbf{Ens}$ ein Funktor und $\Omega \subset H(\hat{R})$ eine Teilmenge.

(1) H heißt approximierbar :<===>

$$\forall\, \bar{\omega} \in H(\hat{R})\ \forall_n \in \mathbb{N}\ \exists\, \omega \in H(R):$$

$$H(\zeta_n)(\bar{\omega}) = H(\pi_n)(\omega)\ .$$

(2) H heißt Ω-approximierbar :<===>

$$\forall\, \bar{\omega} \in \Omega\ \forall_n \in \mathbb{N}\ \exists\, \omega \in H(R):$$

(i) $H(\zeta_n)(\bar{\omega}) = H(\pi_n)(\omega)$

(ii) $H(i)(\omega) \in \Omega$.

(9.6)Es sei D der Isomorphieklassenfunktor des Systems $\underline{K}$ (vgl.(1.12)) und

$$\Omega := \{\ \bar{\omega} \in D(\hat{R}) \mid \bar{\omega} \subset E\ \}.$$

Fordern wir die Ω-Approximierbarkeit von D, so erhalten wir zu $[\bar{\Delta}_o]$ und n_o ein Datum $\Delta \in K(R)$ mit

(1) $D(\zeta_{n_o})([\bar{\Delta}_o]) = D(\pi_{n_o})([\Delta])$

und (2) $D(i)([\Delta]) \in \Omega$.

(1) impliziert

$$[F_{\zeta_{n_o}}(\bar{\Delta}_o)] = [F_{\pi_{n_o}}(\Delta)] = [F_{\zeta_{n_o}} \circ F_i(\Delta)]$$

und liefert somit einen Isomorphismus

$$\delta' : F_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o) \longrightarrow F_{\zeta_{n_o}} \circ F_i(\Delta) \ ;$$

(2) besagt $F_i(\Delta) \in E$.

Definieren wir $T := \phi_R^* \circ \phi_R(\Delta)$, so gilt

$$\otimes_i(T) = \otimes_i \circ \phi_R^* \circ \phi_R(\Delta) = \phi_{\hat{R}}^* \circ (\otimes_i \circ \phi_R)(\Delta) = \phi_{\hat{R}}^* \circ \phi_{\hat{R}}(F_i(\Delta)),$$

d.h. $F_i(\Delta)$ ist ein Datum für $\otimes_i(T)$. Die Voraussetzungen des Kriteriums (×) sind jedoch nicht realisiert: Wir finden i.a. keinen Morphismus $\delta: \overline{\Pi} \circ \phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o) \longrightarrow \overline{\Pi} \circ \phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta})$, der $\phi_{R_{n_o}}$ (δ') induziert. Zur Sicherung der Existenz von δ werden wir das vorgegebene Kategoriensystem $\underline{K}$ mittels einer " Liftungsbedingung " erweitern und eine geeignete Approximierbarkeit des Isomorphieklassenfunktors der Erweiterung von $\underline{K}$ fordern.

10. Liftungsbedingungen

(10.1) I.f. sei

(1) R semi-lokal und $\underline{B}_o = \underline{B}_e$

o d e r

(2) R noethersch und $\underline{B}_o = \underline{B}_q$.

Ferner seien $\hat{R}, i, R_n, \pi_n, \zeta_n$ wie in (9.1) und $\varphi_{nm}: R_m \longrightarrow R_n$ für $m \geq n$ die kanonischen Homomorphismen (vgl. (7.2.5)). K bezeichne eine Kategorie.

Für Diagramme $\overline{\Delta}: K \longrightarrow C_o\langle \hat{R} \rangle$ sei

$$\gamma_{\overline{\Delta},n} = \gamma_{\overline{\Delta},\zeta_n} : \overline{\Pi}(\overline{\Delta}) \longrightarrow \overline{\Pi}(\otimes_{\zeta_n} \circ \overline{\Delta})$$

die in (3.6.1) bzw.

$$\alpha_{\overline{\Delta},n} = \alpha_{\overline{\Delta},\varphi_{n,n+1},\zeta_{n+1}} : \overline{\Pi}(\otimes_{\zeta_{n+1}} \circ \overline{\Delta}) \longrightarrow \overline{\Pi}(\otimes_{\zeta_n} \circ \overline{\Delta})$$

die in (3.6.2) angegebene natürliche Transformation; vgl. auch (7.12) und (7.14).

(10.2)Definition

Sei $\overline{\Delta}_o$ ein Diagramm vom Typ K in $C_o\langle\hat{R}\rangle$. Ein Paar $(G,\overline{\xi}_o)$, bestehend aus einem Funktor

$$G\colon [K,\mathcal{C}] \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

und einem Element

$$\overline{\xi}_o \in G\circ\Pi(\overline{\Delta}_o),$$

heißt eine Liftungsbedingung für $\overline{\Delta}_o$, wenn folgendes erfüllt ist:
Ist $\overline{\Delta}: K \longrightarrow C_o\langle R\rangle$ ein weiteres Diagramm, $\xi \in G\circ\Pi(\otimes_{\zeta_{n+1}}\circ\overline{\Delta})$ und

$$\delta\colon \Pi(\otimes_{\zeta_{n+1}}\circ\overline{\Delta}_o) \longrightarrow \Pi(\otimes_{\zeta_n}\circ\overline{\Delta})$$

eine natürliche Transformation mit

$$G(\delta\circ\gamma_{\overline{\delta}_o,n+1})(\overline{\xi}_o) = G(\alpha_{\overline{\Delta},n})(\xi),$$

so existiert ein

$$\delta\colon \Pi(\otimes_{\zeta_{n+1}}\circ\overline{\Delta}_o) \longrightarrow \Pi(\otimes_{\zeta_{n+1}}\circ\overline{\Delta})$$

mit $\alpha_{\overline{\Delta},n}\circ\delta = \delta$

und $G(\delta\circ\gamma_{\overline{\delta}_o,n+1})(\overline{\xi}_o) = \xi$.

(10.3)Satz Voraussetzungen und Bezeichnungen wie oben. Ist $(G,\overline{\xi}_o)$ eine Liftungsbedingung, so gilt folgendes:

Sei $\overline{\Delta} \in |[K,C_o\langle\hat{R}\rangle]|$, $\overline{\xi} \in G\circ\Pi(\overline{\Delta})$, $n_o \in \mathbb{N}$ und

$$\delta'\colon \Pi(\otimes_{\zeta_{n_o}}\circ\overline{\Delta}_o) \longrightarrow \Pi(\otimes_{\zeta_{n_o}}\circ\overline{\Delta})$$

ein Morphismus mit

$$G(\delta'\circ\gamma_{\overline{\delta}_o,n_o})(\overline{\xi}_o) = G(\gamma_{\overline{\delta},n_o})(\overline{\xi}).$$

Dann existiert ein Morphismus

$$\delta\colon \Pi(\overline{\Delta}_o) \longrightarrow \Pi(\overline{\Delta})$$

derart, daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} \Pi(\bar{\Delta}_o) & \xrightarrow{\delta} & \Pi(\bar{\Delta}) \\ \downarrow \gamma_{\bar{\Delta}_o, n_o} & & \downarrow \gamma_{\bar{\Delta}, n_o} \\ \Pi(\otimes\zeta_{n_o} \circ \bar{\Delta}_o) & \xrightarrow{\delta'} & \Pi(\otimes\zeta_{n_o} \circ \bar{\Delta}) \end{array} .$$

Beweis:

Wir definieren eine Sequenz $(\delta_n)_{n \geq n_o}$ von Morphismen

$$\delta_n : \Pi(\otimes\zeta_n \circ \bar{\Delta}_o) \longrightarrow \Pi(\otimes\zeta_n \circ \bar{\Delta})$$

mit

(1) $\delta_{n_o} = \delta'$

(2) $G(\delta_n \circ \gamma_{\bar{\Delta}_o, n})(\bar{\xi}_o) = G(\gamma_{\bar{\Delta}, n})(\bar{\xi}) \quad \forall\, n \geq n_o$

(3) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Pi(\otimes\zeta_{n+1} \circ \bar{\Delta}_o) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & \Pi(\otimes\zeta_{n+1} \circ \bar{\Delta}) \\ \downarrow \alpha_{\bar{\Delta}_o, n} & & \downarrow \alpha_{\bar{\Delta}, n} \\ \Pi(\otimes\zeta_n \circ \bar{\Delta}_o) & \xrightarrow{\delta_n} & \Pi(\otimes\zeta_n \circ \bar{\Delta}) \end{array}$$

ist kommutativ $\forall\, n \geq n_o$.

Induktion über n:

Für $n = n_o$ sei $\delta_n = \delta'$. Nach Voraussetzung erfüllt δ_{n_o} die Bedingung (2).

Sei $n \geq n_o$ und seien Morphismen $\delta_{n_o}, \ldots, \delta_n$ so angegeben, daß jedes δ_m die Bedingung (2) erfüllt ($m = n_o, \ldots, n$) und für jedes Paar (δ_m, δ_{m+1}) das Diagramm (3) kommutativ ist ($m = n_o, \ldots, n-1$).

Wir setzen $\xi := G(\gamma_{\bar{\Delta}, n+1})(\bar{\xi})$. Der Morphismus

$$\delta_n \circ \alpha_{\bar{\Delta}_o, n} : \Pi(\otimes\zeta_{n+1} \circ \bar{\Delta}_o) \longrightarrow \Pi(\otimes\zeta_n \circ \bar{\Delta})$$

erfüllt dann die Bedingung

$$G(\delta_n \circ \alpha_{\bar{\Delta}_0,n} \circ \gamma_{\bar{\Delta}_0,n+1})(\bar{\xi}_0)$$

$$\overset{(3.6.3)}{=} G(\delta_n \circ \gamma_{\bar{\Delta}_0,n})(\bar{\xi}_0)$$

$$\overset{\text{Ind.-Vor.}}{=} G(\gamma_{\bar{\Delta},n})(\bar{\xi})$$

$$\overset{(3.6.3)}{=} G(\alpha_{\bar{\Delta},n} \circ \gamma_{\bar{\Delta},n+1})(\bar{\xi})$$

$$= G(\alpha_{\bar{\Delta},n})(\xi) \ ;$$

also existiert ein

$$\delta_{n+1} : \mathcal{T}(\mathfrak{C}_{\zeta_{n+1}} \circ \bar{\Delta}_0) \longrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{C}_{\zeta_{n+1}} \circ \bar{\Delta})$$

mit $\alpha_{\bar{\Delta},n} \circ \delta_{n+1} = \delta_n \circ \alpha_{\bar{\Delta}_0,n}$

und $G(\delta_{n+1} \circ \gamma_{\bar{\Delta}_0,n+1})(\bar{\xi}_0) = \xi = G(\gamma_{\bar{\Delta},n+1})(\bar{\xi})$.

Damit ist die Existenz der Abbildungen δ_n bewiesen. Aufgrund der Bedingungen (1) und (3) folgt alles weitere aus (7.14).

(10.4) Wir wollen den Zusammenhang mit den bekannten deformationstheoretischen Begriffen angeben!
Die zugrundeliegende Algebra R sei lokal; ferner gelte in (10.2) speziell $|K| = \{0\}$, $\mathrm{Hom}_K(0,0) = \{\mathrm{id}_0\}$. Dann kann $[K,\underline{B}_0]$ mit $\underline{B}_0$ und $[K,\bar{C}]$ mit $\bar{C}$ identifiziert werden, und der kanonische Funktor $\mathcal{T}: \mathrm{Ass}[K,\underline{B}_0] \longrightarrow [K,\bar{C}]$ wird durch

$$T \longmapsto \bar{T}, \quad (\varphi,\varphi') \longmapsto \varphi' \circ \gamma^{S,1}_{T,S,\varphi}$$

beschrieben (vgl.(2.6)). Wir setzen $\bar{T}_0 := \bar{\Delta}_0(0)$.
Sei $k_0 := |\hat{R}|/\hat{\mathfrak{M}}$ und $C_{k_0}\langle\hat{R}\rangle$ die volle Unterkategorie von $C\langle\hat{R}\rangle$ der Objekte

$$|C_{k_0}\langle\hat{R}\rangle| := \{\bar{T} \in |C\langle\hat{R}\rangle| \mid \bar{\Theta}_1 : k_0 \longrightarrow |\bar{T}|/\bar{4} \text{ ist ein Isomorphismus}\} \ ;$$

hier sei $\bar{\Theta}_1$ der durch den kanonischen Morphismus induzierte Isomorphismus. Es gilt

$\underline{B}_0 = \underline{B}_q$ trivial und im Falle $\underline{B}_0 = \underline{B}_e$ in (7.11) bewiesen

Mit $C_{k_o,a}\langle\hat{R}\rangle$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie von $C_{k_o}\langle\hat{R}\rangle$ der artinschen Algebren:

$$|C_{k_o,a}\langle\hat{R}\rangle| := \{S \in |C_{k_o}\langle\hat{R}\rangle| \mid \mathfrak{s}^n = (0) \text{ für geeignetes } n\}.$$

Ferner sei $F: C_{k_o}\langle\hat{R}\rangle \longrightarrow Ens$ ein Funktor und $\xi_o \in F(k_o)$ (hier ist kurz k_o anstelle von $(k_o,0)_{\pi_{\hat{R},1}}$ geschrieben worden).

(1) Eine infinitisimale Deformation von ξ_o ist ein Paar (S,ξ) mit
   (i) $S \in |C_{k_o,a}\langle\hat{R}\rangle|$
   (ii) $\xi \in F(S)$
   (iii) $F(\pi_{S,1})(\xi) = F(\sigma_1)(\xi_o)$

(2) Eine formale Deformation von ξ_o ist ein Paar $(\overline{T},\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ mit
   (i) $\overline{T} \in |C_{k_o}\langle\hat{R}\rangle|$
   (ii) $\xi_n \in F(\overline{T}/\overline{\mathfrak{t}}^n)$
   (iii) $F(\varphi_{\overline{T},nm})(\xi_m) = \xi_n \quad \forall m \geq n$
   (iv) $\xi_1 = F(\overline{\sigma}_1)(\xi_o)$

(3) Sei $(\overline{T},\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ eine formale Deformation von ξ_o. Wir nennen $(\overline{T},\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ eine formale versale Deformation von ξ_o, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:
   Seien (S,ξ), (S^*,ξ^*) infinitisimale Deformationen von ξ_o und $\varepsilon: S \longrightarrow S^*$ ein Epimorphismus mit $F(\varepsilon)(\xi) = \xi^*$. Es gelte $\mathfrak{s}^n = (0)$. Zu jedem Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_{C\langle R\rangle}(\overline{T}/\overline{\mathfrak{t}}^n, S^*)$ mit $F(\varphi)(\xi_n) = \xi^*$ existiert ein $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{C\langle R\rangle}(\overline{T}/\overline{\mathfrak{t}}^n, S)$ mit
   (i) $\varepsilon\circ\overline{\varphi} = \varphi$
   (ii) $F(\overline{\varphi})(\xi_n) = \xi$.

(4) Eine formale Deformation $(\overline{T},\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ heißt effektiv, wenn es ein Element $\overline{\xi} \in F(\overline{T})$ mit $F(\tau_{\overline{T},n})(\overline{\xi}) = \xi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gibt.

(In Vorangegangenem bezeichnen $\pi_{\overline{T},n}: \overline{T} \longrightarrow \overline{T}/\overline{\mathfrak{t}}^n$, $\varphi_{\overline{T},nm}: \overline{T}/\overline{\mathfrak{t}}^m \longrightarrow \overline{T}/\overline{\mathfrak{t}}^n$ $(m \geq n)$ die natürlichen Homomorphismen.)

Es gilt:

(5) Lemma Sei $G\colon \check{C} \longrightarrow Ens$ ein Funktor und $F\colon C_{k_o}\langle\hat{R}\rangle \longrightarrow Ens$ durch

$$\overline{T} \longmapsto G(\tilde{\overline{T}}),\quad \varphi \longmapsto G(\varphi)$$

definiert. Ferner sei $(\overline{T}_o, \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ eine effektive formale versale Deformation von $\xi_o \in F(k_o)$ und $\overline{\xi}_o \in F(\overline{T}_o)$ ein Element mit $F(\pi_{\overline{T}_o,n})(\overline{\xi}_o) = \xi_n \;\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(G,\overline{\xi}_o)$ eine Liftungsbedingung für $\overline{T}_o$.

Beweis:
Nach (7.11) ist $\overline{\mathfrak{A}}$ ein maximales Ideal für jedes $\overline{T} \in |C_o\langle\hat{R}\rangle|$, und es gilt $\overline{\mathfrak{A}} = \mathrm{rad}(\overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{r}}).|\overline{T}|)$. Somit sind die Algebren $\widetilde{\mathfrak{o}_{\zeta_n}(\overline{T})}$ artinsch, denn in (6.5) ist $\widetilde{\mathfrak{o}_{\zeta_n}(\overline{T})} \simeq \widetilde{\overline{T}/\overline{\Theta}(\hat{\mathfrak{r}}^n).|\overline{T}|}$ bewiesen worden. Die Aussage des Lemmas (5) folgt nun unmittelbar aus der Versalität der formalen Deformation $(\overline{T}_o, \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

(10.5) Lemma (10.4.5) zeigt, daß die Frage nach der Existenz von Liftungsbedingungen auf bekannte deformationstheoretische Probleme zurückgeführt werden kann; siehe Schlessinger [1], Artin [5] (insbesondere p. 23 - 25).

11. Ein Algebraisierungssatz

(11.1) Wie zuvor setzen wir voraus:
(1) R ist semilokal und $\underline{B}_o = \underline{B}_e$
o d e r
(2) R ist noethersch und $\underline{B}_o = \underline{B}_q$.
Darüber hinaus übernehmen wir die vorangegangenen Bezeichnungen; $\overline{\mathbb{T}}$ ist i.f. der kanonische Funktor $\mathrm{Ass}[K^*,\underline{B}_o] \longrightarrow [K^*,\check{C}]$. Die Ergebnisse aus 9. und 10. führen auf folgenden Satz:

(11.2) Satz (formale Algebraisierung)
Sei $\overline{T}_o \in |C_o\langle\hat{R}\rangle|$ gegeben. Es existiere ein Datensystem $(\underline{K},K^*,\Phi,\Phi^*,E,\overline{\Delta}_o,n_o)$ für $\overline{T}_o$ und eine Liftungsbedingung $(G,\overline{\xi}_o)$ für $\Phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o)$. $\check{\underline{K}}$ bezeichne die $(\Phi,G\circ\overline{\mathbb{T}})$-Erweiterung von $\underline{K}$ und $\check{D}$ den Isomorphieklassenfunktor von $\check{\underline{K}}$; ferner sei

$$\check{\Omega} := \{\check{\overline{\omega}} \in \check{D}(\hat{R}) \mid \exists\,(\overline{\Delta},\overline{\xi}) \in \check{\overline{\omega}} : \overline{\Delta} \in E\}.$$

Ist $\check{D}$ $\check{\Omega}$-approximierbar, so existiert ein $T_o \in C_o\langle R\rangle$ mit

$$\widetilde{\mathfrak{o}_1(T_o)} \simeq \tilde{\overline{T}}_o\ .$$

Beweis:

Zu $\overset{\vee}{\overline{\omega}} := [(\overline{\Delta}_o, \overline{\xi}_o)] \in \overset{\vee}{D}(\hat{R})$ und n_o existiert nach Voraussetzung ein $\overset{\vee}{\omega} \in \overset{\vee}{D}(R)$ mit

(1) $\overset{\vee}{D}(\zeta_{n_o})(\overset{\vee}{\overline{\omega}}) = \overset{\vee}{D}(\pi_{n_o})(\overset{\vee}{\omega})$

(2) $\overset{\vee}{D}(i)(\overset{\vee}{\omega}) \in \overset{\vee}{\Omega}$.

Sei (Δ, ξ) ein Repräsentant von $\overset{\vee}{\omega}$. Aus (1) ergibt sich

$$[\overset{\vee}{F}_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o, \overline{\xi}_o)] = [\overset{\vee}{F}_{\pi_{n_o}}(\Delta, \xi)] = [\overset{\vee}{F}_{\zeta_{n_o}} \circ \overset{\vee}{F}_i(\Delta, \xi)] \ ;$$

es existiert also ein $\overset{\vee}{K}(R_{n_o})$-Isomorphismus

$$\delta' : \overset{\vee}{F}_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o, \overline{\xi}_o) \xrightarrow{\sim} \overset{\vee}{F}_{\zeta_{n_o}} \circ \overset{\vee}{F}_i(\Delta, \xi) \ .$$

Wir geben die auftretenden Objekte explizit an:

(3) $\overset{\vee}{F}_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o, \overline{\xi}_o) = (F_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o), G(\overset{\vee}{\wp}\phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o), n_o)(\overline{\xi}_o))$

P.d. gilt

$$\overset{\vee}{F}_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o, \overline{\xi}_o) = (F_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o), G \circ \Pi \circ \underline{\Phi}(\zeta_{n_o}, id_{F_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o)})(\overline{\xi}_o)) \ ;$$

also ergibt sich (3) aus folgender Beziehung:

$$G \circ \Pi \circ \underline{\Phi}(\zeta_{n_o}, id_{F_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o)})$$

$$\overset{(1.8)}{=} G \circ \Pi(\zeta_{n_o}, \phi_{R_{n_o}}(id_{F_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o)}))$$

$$= G \circ \Gamma(\zeta_{n_o}, id_{\phi_{R_{n_o}} \circ F_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o)})$$

$$= G \circ \tilde{\Gamma} \circ \Pi_1(\zeta_{n_o}, id_{\otimes_{\zeta_{n_o}} \circ \phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o)})$$

$$\overset{(3.5)}{=} G((\Pi_o(\zeta_{n_o}, id_{\otimes_{\zeta_{n_o}}}(\phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o)(j)))_{j \in |K^*|})$$

$$\overset{(2.6)}{=} G((\overset{\hat{R},1}{\wp}\phi_R(\overline{\Delta}_o)(j), R_{n_o}, \zeta_{n_o})_{j \in |K^*|})$$

$$= G(\overset{\vee}{\wp}\phi_R(\overline{\Delta}_o), n_o)$$

(4) $\overset{\vee}{F}_i(\Delta,\xi) = (F_i(\Delta), G(\gamma\!\!\!\gamma_{\phi_R(\Delta),i})(\xi))$

Analog (3) erhalten wir

$$\overset{\vee}{F}_i(\Delta,\xi) = (F_i(\Delta), G\circ\Pi\circ\underline{\Phi}(i,id_{F_i(\Delta)})(\xi))$$

mit $G\circ\Pi\circ\underline{\Phi}(i,id_{F_i(\Delta)})$

$$= G\circ\Pi(i,\phi_{\hat{R}}(id_{F_i(\Delta)}))$$

$$= G\circ\tilde{\Pi}\circ\Pi_1(i,id_{\phi_{\hat{R}}\circ F_i(\Delta)})$$

$$= G((\Pi_o(i,id_{\otimes_i(\phi_R(\Delta)(j))})_{j\in|K^*|})$$

$$= G((\gamma\!\!\!\gamma^{R,1}_{\phi_R(\Delta)(j),\hat{R}})_{j\in|K^*|})$$

$$= G(\gamma\!\!\!\gamma_{\phi_R(\Delta),i}) \ .$$

Aus (3) und (4) ergibt sich offensichtlich

(5) $\overset{\vee}{F}_{\zeta_{n_o}}\circ\overset{\vee}{F}_i(\Delta,\xi) = (F_{\zeta_{n_o}}\circ F_i(\Delta), G(\gamma\!\!\!\gamma_{\phi_{\hat{R}}\circ F_i(\Delta),n_o}\circ\gamma\!\!\!\gamma_{\phi_R(\Delta),i})(\xi))$.

Nach Definition der Erweiterung eines Kategoriensystems ist der durch (1) erhaltene Morphismus δ' also ein Isomorphismus

$$\delta' : F_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o) \xrightarrow{\sim} F_{\zeta_{n_o}}\circ F_i(\Delta)$$

mit $G(\phi_{R_{n_o}}(\delta')\circ\gamma\!\!\!\gamma_{\phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o),n_o})(\overline{\xi}_o) = G(\gamma\!\!\!\gamma_{\phi_{\hat{R}}\circ F_i(\Delta),n_o}\circ\gamma\!\!\!\gamma_{\phi_R(\Delta),i})(\xi)$.

Setzen wir $\overline{\xi} := G(\gamma\!\!\!\gamma_{\phi_R(\Delta),i})(\xi)$, so gilt

$$\overline{\xi} \in G\circ\Pi(\phi_{\hat{R}}\circ F_i(\Delta)) \ ,$$

denn $\xi \in G\circ\Pi\circ\underline{\Phi}(\Delta) = G\circ\Pi(\phi_R(\Delta))$ und

$$\gamma\!\!\!\gamma_{\phi_R(\Delta),i} \overset{(3.6.1)}{\in} \mathrm{Hom}_{[K^*,\mathfrak{C}]}(\Pi(\phi_R(\Delta)),\Pi(\otimes_i\circ\phi_R(\Delta))) = \mathrm{Hom}_{[K^*,\mathfrak{C}]}(\Pi(\phi_R(\Delta)),\Pi(\phi_{\hat{R}}\circ F_i(\Delta))) \ .$$

Also existiert nach Satz (10.3) ein Morphismus δ, derart daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc} \Pi(\phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o)) & \xrightarrow{\ \delta\ } & \Pi(\phi_{\hat{R}}(F_i(\Delta))) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma\!\!\!\gamma_{\phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o),n_o}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma\!\!\!\gamma_{\phi_{\hat{R}}(F_i(\Delta)),n_o}} \\ \Pi(\otimes_{\zeta_{n_o}}\circ\phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o)) & \xrightarrow{\ \phi_{R_{n_o}}(\delta')\ } & \Pi(\otimes_{\zeta_{n_o}}\circ\phi_{\hat{R}}(F_i(\Delta))) \end{array} \ ;$$

m.a.W.: δ induziert $\phi_{R_{n_o}}(\delta')$ im Sinne von (9.3.2). Wegen (2) gilt darüber hinaus $[\check{F}_i(\Delta,\xi)] \in \check{\Omega}$, d.h. es existiert ein Repräsentant $(\tilde{\tilde{\Delta}},\tilde{\tilde{\xi}})$ von $[\check{F}_i(\Delta,\xi)]$ mit $\tilde{\tilde{\Delta}} \in E$. Dies impliziert nach (4) offenbar $F_i(\Delta) \in E$, denn E ist invariant unter $K(\hat{R})$-Isomorphismen. (9.4.(×)) zeigt nun, daß

$$\begin{aligned}\delta_o: \tilde{\tilde{T}}_o &\longrightarrow \widetilde{(\phi_{\hat{R}}(F_i(\Delta)))(0)} \\ &= \widetilde{(\otimes_i \circ \phi_R(\Delta))(0)} \\ &= \otimes_i \widetilde{(\phi_R^* \circ \phi_R(\Delta))}\end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist. $T_o := \phi_R^* \circ \phi_R(\Delta)$ hat also die gewünschte Eigenschaft.

IV. Approximierbare Funktoren

12. Einfache Beispiele approximierbarer Funktoren

(12.1) Wie zuvor bezeichne C die Kategorie der R-Algebren. Die Approximierbarkeit eines Funktors $H: C \to Ens$ beinhaltet offenbar, daß die Dichtheit von R in $\hat{R}$ bei Anwendung von H - in dem in (9.5) präzisierten Sinne - nicht verloren geht. Es ist deshalb naheliegend, Beispiele folgender Art anzugeben:

(1) H ist i.w. ein Vergißfunktor (vgl. (12.2),(12.3))
oder

(2) die Inklusion $i: R \to \hat{R}$ ist ein Isomorphismus, so daß die Bijektion H(i) die Approximierbarkeit garantiert (vgl. (12.4),(12.5)).

(12.2) **Beispiel**

Wir definieren den Vergißfunktor $V: C \to Ens$ durch

$V(S) := |S|$ (hier als Menge)

$V(\varphi) := \varphi$ (hier als Abbildung von Mengen).

Dann ist V approximierbar.

Beweis:

Seien $\bar{\omega} \in V(\hat{R})$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gilt $V(\zeta_n)(\bar{\omega}) = \zeta_n(\bar{\omega}) \in |R_n|$, also existiert ein $\omega \in |R|$ mit $\tau_n(\omega) = \zeta_n(\bar{\omega})$, d.h. mit $V(\zeta_n)(\bar{\omega}) = V(\tau_n)(\omega)$.

(12.3) **Beispiel**

Wir definieren $H_n: C \to C$ durch $S \mapsto S_n$, $\varphi \mapsto \varphi_n$ (vgl.(7.2.2)).

Dann ist $V \circ H_n: C \to Ens$ ein approximierbarer Funktor.

(12.4) **Beispiel**

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) R ist komplett

(2) jeder Funktor $H: C \to Ens$ ist approximierbar

(3) $H^{\hat{R}}$ ist approximierbar.

Beweis:

(1) ===> (2):

Ist R komplett, so ist $i: R \to \hat{R}$ nach (7.6) ein Isomorphismus.

Aus $\zeta_n \circ i = \pi_n$ folgt somit $H(\zeta_n) = H(\pi_n) \circ H(i)^{-1}$ für jeden Funktor $H: C \longrightarrow Ens$ und jedes $n \in \mathbb{N}$. Trivialerweise impliziert dies die Approximierbarkeit von H.

(2) ===> (3): trivial.

(3) ===> (1):

Für $\varphi \in H^{\hat{R}}(R)$ gilt $\varphi \circ i = id_R$. Diese Beziehung impliziert aber $i \circ \varphi \circ i = i$ und somit $i \circ \varphi = id_{\hat{R}}$ (nach Satz (7.7)). Damit gilt: $H^{\hat{R}}(R) \neq \emptyset$ ===> i ist ein Isomorphismus ===> R ist komplett (vgl. (7.6)).

Ist nun $H^{\hat{R}}$ approximierbar, so existiert zu $id_{\hat{R}} \in H^{\hat{R}}(\hat{R})$ und $n = 1$ ein $\varphi \in H^{\hat{R}}(R)$ mit $H^{\hat{R}}(\zeta_1)(id_{\hat{R}}) = H^{\hat{R}}(\pi_1)(\varphi)$. Insbesondere ist also $H^{\hat{R}}(R) \neq 0$, und es folgt die Behauptung.

Die vorangegangene Äquvalenz bleibt gültig, wenn wir in (3) den Funktor $H^{\hat{R}}$ durch den $\tilde{C}$-Hom-Funktor ersetzen, also die R-Algebra-Struktur " vergessen ". Dies zeigt:

(12.5)Beispiel

Der Funktor $\tilde{H}^{\hat{R}}: C \longrightarrow Ens$ sei durch

$$\tilde{H}^{\hat{R}}(S) := Hom_{\tilde{C}}(\tilde{\hat{R}}, \tilde{S})$$

$$\tilde{H}^{\hat{R}}(\varphi)(\psi) := \varphi \circ \psi$$

festgelegt. Ist $\tilde{H}^{\hat{R}}$ approximierbar, so ist R komplett.

Beweis:

Zu $id_{\tilde{\hat{R}}} \in \tilde{H}^{\hat{R}}(\hat{R})$ und $n = 2$ existiert ein $\varphi \in \tilde{H}^{\hat{R}}(R)$ mit

$$\tilde{H}^{\hat{R}}(\zeta_2)(id_{\tilde{\hat{R}}}) = \tilde{H}^{\hat{R}}(\pi_2)(\varphi),$$

d.h. mit $\zeta_2 = \pi_2 \circ \varphi$. Durch Induktion über ν folgert man hieraus

(i) $r \in \mathfrak{m}^{\nu}$ ===> $\varphi \circ i(r) - r \in \mathfrak{m}^{\nu+1}$.

Aus (i) ergibt sich leicht:

(ii) φ ist isometrisch (vgl.(7.5.2)).

und

(iii) $\varphi: |\hat{R}| \longrightarrow |R|$ ist surjektiv.

Die Aussagen (ii) und (iii) liefern offensichtlich das Gewünschte.

13. Approximierbare Lösungsfunktoren

(13.1)(1) Sei $R[x]$ der Polynomring über R in den Unbestimmten $x = (x_1,\dots,x_N)$. Für

$$p = \sum r_\nu x^\nu \in |R|[x]$$

und $\underline{s} = (s_1,\dots,s_N) \in \times_N|S|$

sei $p(\underline{s}) := \sum 6(r_\nu)\underline{s}^\nu$.

Hier wie i.f. bezeichnet $\times_N M$ das N-fache kartesische Produkt einer Menge M.

(2) Sei $\mathfrak{a} \subset R[x]$ ein Ideal (vgl. (5.5) und (6.1.4)) Wir legen mittels $\mathfrak{a}$ wie folgt einen Funktor $L_\mathfrak{a}: C \to Ens$ fest.

(i) Für $S \in |C|$ sei

$$L_\mathfrak{a}(S) := \{\underline{s} \in \times_N S \mid p(\underline{s}) = 0 \ \forall p \in \mathfrak{a}\},$$

(ii) für $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S')$ sei

$$L_\mathfrak{a}(\varphi)(\underline{s}) := \varphi(\underline{s}) \quad (:= (\varphi(s_1),\dots,\varphi(s_N))).$$

$L_\mathfrak{a}$ ist in der Tat ein Funktor; denn einerseits impliziert $\underline{s} \in \times_N S$ gewiß $\varphi(\underline{s}) \in \times_N S'$, andererseits folgt aus $p(\underline{s}) = 0$ sofort $0 = \varphi(p(\underline{s})) = p(\varphi(\underline{s}))$.

(3) Wir nennen $L_\mathfrak{a}$ den Lösungsfunktor des Gleichungssystems $p(x) = 0 \ \forall p \in \mathfrak{a}$. $\mathscr{L} \subset |[C,Ens]|$ sei die Menge aller Lösungsfunktoren und $\hat{\mathscr{L}}$ die Menge aller Funktoren $H: C \to Ens$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \bar{\omega} \in H(\hat{R}) \quad \exists \quad \text{(i) } L^{\bar{\omega}} \in \mathscr{L}$$
$$\text{(ii) } \tau^{\bar{\omega}} \in \mathrm{Hom}_{[C,Ens]}(L^{\bar{\omega}},H)$$
$$\text{(iii) } \hat{\underline{r}} \in L^{\bar{\omega}}(\hat{R}): \tau^{\bar{\omega}}_{\hat{R}}(\hat{\underline{r}}) = \bar{\omega} \ .$$

(13.2)Satz(1) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $H \in \hat{\mathscr{L}}$

(b) H ist ausschöpfend.

(2) Ist $\mathscr{L}$ eine Menge approximierbarer Funktoren, so ist jeder Funktor $H \in \hat{\mathscr{L}}$ approximierbar.

Beweis:

(1): Unter Beachtung von Satz (8.9) ist die Äquvalenz von (a) und (b) eine triviale Konsequenz aus folgender Aussage:

(c) Sei S^* von endlichem Typ, $\varepsilon: R[x] \to S^*$ ein Epimorphismus und $\mathfrak{a} := \ker\varepsilon$. Es existiert ein natürlicher Isomorphismus $\tau : L_{\mathfrak{a}} \xrightarrow{\sim} H^{S^*}$.

Beweis von (c):

Sei $S \in |C|$ und $\underline{s} \in L_{\mathfrak{a}}(S)$. Wegen $s_\nu \in S$ $(\nu=1,\dots N)$ wird durch

$$\psi_{\underline{s}}: p \longmapsto p(\underline{s})$$

offensichtlich ein R-Algebra-Homomorphismus $\psi_{\underline{s}}: R[x] \to S$ mit $\psi_{\underline{s}}|\mathfrak{a} = 0$ definiert. Mit $\phi_{\underline{s}}: S^* \to S$ bezeichnen wir den durch

$$\phi_{\underline{s}} \circ \varepsilon = \psi_{\underline{s}}$$

eindeutig bestimmten Homomorphismus. Definieren wir

$$\tau_S(\underline{s}) := \phi_{\underline{s}} ,$$

so ist $\tau := (\tau_S)_{S\in|C|}: L_{\mathfrak{a}} \to H^{S^*}$ eine natürliche Transformation, denn es gilt

$$\begin{aligned}(H^{S^*}(\varphi)\circ\tau_S)(\underline{s}) &= H^{S^*}(\varphi)(\phi_{\underline{s}}) \\ &= \varphi\circ\phi_{\underline{s}} \\ &= \phi_{\varphi(\underline{s})} \\ &= \phi_{L_{\mathfrak{a}}(\varphi)(\underline{s})} \\ &= (\tau_{S'}\circ L_{\mathfrak{a}}(\varphi))(\underline{s}) \quad \forall\ \varphi \in \mathrm{Hom}_C(S,S').\end{aligned}$$

Offensichtlich ist τ_S für jedes $S \in |C|$ bijektiv; dies beweist (c).

(2): Sei $H \in \hat{\mathscr{E}}$, und seien $\bar{\omega} \in H(\hat{R})$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wählen $L^{\bar{\omega}}$, $\tau^{\bar{\omega}}$ und $\hat{\underline{r}}$ wie in (13.1.3). Da $L^{\bar{\omega}}$ nach Voraussetzung approximierbar ist, existiert ein $\underline{r} \in L^{\bar{\omega}}(R)$ mit

$$L^{\bar{\omega}}(\pi_n)(\underline{r}) = L^{\bar{\omega}}(\zeta_n)(\hat{\underline{r}}).$$

Nun kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} L^{\bar{\omega}}(\hat{R}) & \xrightarrow{L^{\bar{\omega}}(\zeta_n)} & L^{\bar{\omega}}(R_n) & \xleftarrow{L^{\bar{\omega}}(\pi_n)} & L^{\bar{\omega}}(R) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau^{\bar{\omega}}_{\hat{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau^{\bar{\omega}}_{R_n}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau^{\bar{\omega}}_{R}} \\ H(\hat{R}) & \xrightarrow{H(\zeta_n)} & H(R_n) & \xleftarrow{H(\pi_n)} & H(R) \end{array} ;$$

definieren wir $\omega := \tau_R^{\overline{\omega}}(\underline{r})$, so folgt also

$$\begin{aligned} H(\pi_n)(\omega) &= \tau_{R_n}^{\overline{\omega}} \circ L^{\overline{\omega}}(\pi_n)(\underline{r}) \\ &= \tau_{R_n}^{\overline{\omega}} \circ L^{\overline{\omega}}(\zeta_n)(\hat{\underline{r}}) \\ &= H(\zeta_n) \circ \tau_{\hat{R}}^{\overline{\omega}}(\hat{\underline{r}}) \\ &= H(\zeta_n)(\overline{\omega}). \end{aligned}$$

Damit ist die Approximierbarkeit von H gezeigt.

(13.3) Ein fundamentaler Satz von M.Artin garantiert für eine im Hinblick auf die Anwendungen hinreichend große Klasse von Algebren R die Approximierbarkeit eines jeden Lösungsfunktors. Wir geben zuvor die zur Formulierung des Satzes notwendigen Begriffe der kommutativen Algebra an.

(1) Definition (Nagata [1], p.103)

Eine lokale Algebra $\tilde{S} \in |\tilde{C}|$ heißt henselsch, falls folgende Bedingung erfüllt ist:
Sei $|S|[y]$ der Polynomring über $|S|$ in einer Unbestimmten y und $p \in |S|[y]$ ein normiertes Polynom. Es gelte

$$p \equiv p_0 \cdot p_1 \bmod \mathfrak{s}.(|S|[y])$$

mit normierten Polynomen $p_0, p_1 \in |S|[y]$ mit der Eigenschaft

$$p_0 \cdot |S|[y] + p_1 \cdot |S|[y] + \mathfrak{s}.(|S|[y]) = |S|[y].$$

Dann existieren normierte Polynome $q_0, q_1 \in |S|[y]$ mit

$$p = q_0 \cdot q_1$$

und $p_\nu - q_\nu \in \mathfrak{s}.(|S|[y])$, $\nu = 0,1$.

(2) Definition (vgl. Grothendieck [3], EGAIV, 18,p.137)

Sei $\tilde{S} \in |\tilde{C}|$ eine lokale Algebra. Eine Algebra $\tilde{S}_\varsigma^h \in |\tilde{C}\langle\tilde{S}\rangle|$ heißt Henselierung von $\tilde{S}$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\tilde{S}^h$ ist eine henselsche lokale Algebra

(ii) Für jede henselsche lokale Algebra $\tilde{T}$ ist die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\tilde{S}^h, \tilde{T}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\tilde{S}, \tilde{T})$$

$(\varphi \mapsto \varphi \circ \varsigma)$ bijektiv .

(3) Als Lösung eines universellen Abbildungsproblems ist die Henselierung von $\mathfrak{S}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Die Existenz wird in Grothendieck [3], EGAIV,18.6 bewiesen (Definition(18.6.5), Theoreme (18.6.6). Vgl. auch Nagata [1],§43).

(4) Sei $i \subsetneq k[X]$ ein Ideal ($X = (X_1,\ldots,X_{N_o})$) und $\mathfrak{p} \subset k[X]/i$ ein Primideal. Dann ist

$$((k[X]/i)_{\mathfrak{p}}\ ,\ \mathfrak{p}.(k[X]/i)_{\mathfrak{p}}\ ) =: \mathfrak{S}$$

eine lokale (k,0)-Algebra (Zariski - Samuel [1],p.228, Theorem19.). Es sei

$$|R| := |S^h| \text{ der Träger der Henselierung von } \mathfrak{S}$$

$$\mathfrak{W} \subsetneq |R| \text{ ein Ideal}$$

und $\quad R := (|R|,\mathfrak{W},id_{|R|})$.

Nach M.Artin gilt folgender Satz über die Approximation formaler Lösungen algebraischer Gleichungssysteme (Artin [3],p.26, Theorem(1.10)):

Seien $p_1,\ldots,p_l \in |R|[x]$ ($x = (x_1,\ldots,x_N)$), und sei $\hat{\underline{r}} = (\hat{r}_1,\ldots,\hat{r}_N) \in \times_N|\hat{R}|$ so, daß

$$p_\lambda(\hat{\underline{r}}) = 0\ ,\ \lambda = 1,\ldots,l.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\underline{r} \in \times_N|R|$ mit

$$p_\lambda(\underline{r}) = 0\ ,\ \lambda = 1,\ldots,l$$

und $\quad i(r_\nu) - \hat{r}_\nu \in \hat{\mathfrak{W}}^n,\ \nu = 1,\ldots,N.$

Letztere Bedingung besagt offenbar $\tau_n(\underline{r}) = \zeta_n(\underline{r})$. Darüber hinaus gilt offensichtlich: $\hat{\underline{r}} \in \times_N\hat{\mathfrak{W}}$ ===> $\underline{r} \in \times_N\mathfrak{W}$.

(5) In dem in (4) betrachteten Fall ist R und somit auch $R[x]$ stets noethersch. Ist $p_1,\ldots,p_l$ ein Erzeugendensystem eines gegebenen Ideals $\mathfrak{a} \subset R[x]$, so gilt offenbar

$$L_{\mathfrak{a}}(S) = \{\underline{s} \in \times_N S \mid p_\lambda(\underline{s}) = 0,\ \lambda = 1,\ldots,l\},$$

und wir können den Approximationssatz wie folgt formulieren.

(13.4)Satz (M.Artin)

Sei R wie in (13.3.4). Dann ist $\mathcal{L}$ eine Menge approximierbarer Funktoren.

(13.5)Aus (13.2) und (13.4) erhalten wir die Approximierbarkeit eines jeden ausschöpfenden Funktors H: C$\longrightarrow$Ens. Wir geben die zur Approximation eines Elements $\bar{\omega} \in H(\hat{R})$ führenden Schritte explizit an:

1.Schritt

Da H ausschöpfend ist, existiert zu $\bar{\omega}$ ein $S \in M(\hat{R})$ und ein $\omega_S \in H(S)$ mit

$$H(\eta_S)(\omega_S) = \bar{\omega} .$$

2.Schritt

Das Element ω_S legt eine natürliche Transformation $\tau^1: H^S \longrightarrow H$ fest; und zwar definiert man

$$\tau^1_{S'}(\varphi) := H(\varphi)(\omega_S) .$$

3.Schritt

Sei $\varepsilon: R[x] \longrightarrow S$ ein Epimorphismus und $\alpha := \mathrm{Ker}\varepsilon$. Es existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$\tau^2: L_\alpha \longrightarrow H^S .$$

Man gewinnt τ^2 wie folgt: für $\underline{s}' \in L_\alpha(S')$ sei

$$\phi_{\underline{s}'}: S \longrightarrow S'$$

der durch $\varepsilon(x_\nu) \mapsto s'_\nu$ wohldefinierte Homomorphismus;

$$\tau^2_{S'}(\underline{s}') := \phi_{\underline{s}'}$$

liefert obige Isomorphie.

4.Schritt

Sehen wir $\varepsilon(x) := (\varepsilon(x_1),\ldots,\varepsilon(x_N))$ als Element der Menge $\times_N |\hat{R}|$ an, so gilt trivialerweise $\varepsilon(x) \in L_\alpha(\hat{R})$ und $\phi_{\varepsilon(x)} = \eta_S$. Die natürliche Transformation $\tau := \tau^1 \circ \tau^2: L_\alpha \longrightarrow H$ hat folglich die Eigenschaft

$$\tau_{\hat{R}}(\varepsilon(x)) = \tau^1 \circ \tau^2(\varepsilon(x)) = \tau^1(\phi_{\varepsilon(x)}) = H(\eta_S)(\omega_S) = \bar{\omega} .$$

5.Schritt

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Approximierbarkeit des Lösungsfunktors L_α garantiert, daß es zu $\varepsilon(x) \in L_\alpha(\hat{R})$ eine Lösung $\underline{r} \in L_\alpha(R)$ mit

$$L_\alpha(\pi_n)(\underline{r}) = L_\alpha(\zeta_n)(\varepsilon(x))$$

gibt. Man setze

$$\omega := \tau_R(\underline{r}) \quad (\in H(R)) ;$$

dann gilt

$$\begin{aligned} H(\tau_n)(\omega) &= H(\pi_n)\circ\tau_R(\underline{r}) = \tau_{R_n}\circ L_\alpha(\pi_n)(\underline{r}) \\ &= \tau_{R_n}\circ L_\alpha(\zeta_n)(\varepsilon(x)) = H(\zeta_n)\circ\tau_{\hat{R}}(\varepsilon(x)) \\ &= H(\zeta_n)(\overline{\omega}). \end{aligned}$$

Bemerkt sei, daß in dieser Situation die Gleichung

$$\begin{aligned} H(i)(\omega) &= H(i)\circ\tau_R(\underline{r}) = \tau^1_{\hat{R}}\circ\tau^2_{\hat{R}}\circ L_\alpha(i)(\underline{r}) \\ &= \tau^1_R(\phi_{i(\underline{r})}) = H(\phi_{i(\underline{r})})(\omega_S) \end{aligned}$$

erfüllt ist.

(13.6)Anmerkung

Das im 5.Schritt erhaltene approximierende Element ω wird i.a. nicht die bei einer Ω-Approximation (vgl.(9.5.2)) geforderte Beziehung $H(i)(\omega) \in \Omega$ erfüllen. Man gewinnt aber stets dann eine Ω-Approximation, wenn man die Aussage $\overline{\omega} \in \Omega$ durch die Lösung eines erweiterten Gleichungssystems beschreiben kann. Man approximiert dann nicht nur $\varepsilon(x)$, sondern die Lösung des erweiterten Systems. Nach diesem Prinzip gelangen wir im 16. Abschnitt zur dimensionserhaltenden Approximation von Daten.

14. Approximierbare Isomorphieklassenfunktoren von Systemen von Funktorkategorien

(14.1)Satz Sei R noethersch, K eine endliche Kategorie und $\Delta : K \longrightarrow C_q\langle\hat{R}\rangle$ ein Diagramm vom Typ K in der Kategorie der Quotienten von $\hat{R}$. Dann existieren ein $S_1 \in M(\hat{R})$ und für jedes $S \in M(\hat{R})$, $S_1 \subset S$ ein Diagramm

$$\Delta_S : K \longrightarrow C_q\langle S\rangle$$

mit $\otimes\eta_S\circ\Delta_S \simeq \Delta$.

Beweis:

Für $j \in |K|$ sei $T_j := \Delta(j)$ und Θ_j der - nach Voraussetzung surjektive - Strukturmorphismus von T_j über $\hat{R}$. Ferner sei

$$\mathfrak{a}_{j,S} := \ker\Theta_j \circ \eta_S \qquad (S \in M(\hat{R})),$$

$$\tilde{T}_{j,S} := \tilde{S}/\mathfrak{a}_{j,S} ,$$

$$\Theta_{j,S} : \tilde{S} \to \tilde{T}_{j,S} \text{ die Projektion}$$

und $T_{j,S} := (\tilde{T}_{j,S})_{\Theta_{j,S}}$;

nach Konstruktion gilt $T_{j,S} \in |C_q\langle S\rangle|$. Offenbar ist

$$\mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(T_{j,S}, \tilde{T}_{j\Theta_j\circ\eta_S}) \neq 0 ,$$

denn der Strukturmorphismus der S-Algebra $\tilde{T}_{j\Theta_j\circ\eta_S}$ annuliert das Ideal $\mathfrak{a}_{j,S}$. Den wegen $T_{j,S} \in |C_q\langle S\rangle|$ zwangsläufig eindeutig bestimmten $C\langle S\rangle$-Morphismus $T_{j,S} \to \tilde{T}_{j\Theta_j\circ\eta_S}$ bezeichnen wir mit $\eta_{j,S}$. Zum Paar

$$(\eta_{j,S}, \Theta_j) \in \mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(T_{j,S}, \tilde{T}_{j\Theta_j\circ\eta_S}) \times \mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}, \tilde{T}_{j\Theta_j\circ\eta_S})$$

existiert genau ein

$$\varphi_{j,S} : T_{j,S} \otimes_S \tilde{\hat{R}}_{\eta_S} \longrightarrow \tilde{T}_{j\Theta_j\circ\eta_S}$$

mit

(1) $\varphi_{j,S} \circ \gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}} = \eta_{j,S}$

(2) $\varphi_{j,S} \circ \gamma^{S,2}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}} = \Theta_j$.

Die Beziehung (2) besagt offenbar

$$\varphi_{j,S} \in \mathrm{Hom}_{C\langle\hat{R}\rangle}(\otimes_{\eta_S}(T_{j,S}), T_j).$$

Wir behaupten:

(3) $\exists S(j) \in M(\hat{R})$: $\varphi_{j,S}$ ist ein Isomorphismus für $S \supset S(j)$.

Nach Voraussetzung ist R noethersch, also ist auch $\hat{R}$ noethersch und folglich $\ker\Theta_j$ endlich erzeugt. Es gelte

$$\ker \Theta_j = \{\hat{r}_1,\dots,\hat{r}_{\aleph_o}\}.|\hat{R}|.$$

Wir wählen S(j) so, daß

$$\hat{r}_\varkappa \in |S(j)| \quad \text{für } \varkappa = 1,\dots,\aleph_o .$$

Sofort folgt $\hat{r}_\varkappa \in |S|$ für $S \supset S(j)$, und offensichtlich gilt $\hat{r}_\varkappa \in \alpha_{j,S}$. Somit ist

$$\begin{aligned} \gamma^{S,2}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S}(\hat{r}_\varkappa) &= \gamma^{S,2}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S}\circ\eta_S(\hat{r}_\varkappa) \\ &= {}^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S}\circ\Theta_{j,S}(\hat{r}_\varkappa) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Dies hat $\gamma^{S,2}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S}|\ker\Theta_j = 0$ zur Folge. Also gibt es genau ein $\overline{\varphi}_{j,S} \in \mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(\mathfrak{T}_{\Theta_j\circ\eta_S}, T_{j,S} \otimes_S \tilde{\hat{R}}\eta_S)$ mit

$$\overline{\varphi}_{j,S}\circ\Theta_j = \gamma^{S,2}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S} .$$

Diese Beziehung besagt $\overline{\varphi}_{j,S} \in \mathrm{Hom}_{C\langle\hat{R}\rangle}(T_j, \otimes_{\eta_S}(T_{j,S}))$. Wegen $\otimes_{\eta_S}(T_{j,S}) \in |C_q\langle\hat{R}\rangle|$ (Satz(6.7)) folgt offensichtlich die Behauptung (3).

Sei nun $\mu \in \mathrm{Hom}_K(j,1)$ und $\phi_\mu := \Delta(\mu)$. Dann gilt $\phi_\mu\circ\Theta_j = \Theta_1$ und folglich $\phi_\mu\circ\Theta_j\circ\eta_S = \Theta_1\circ\eta_S$. Dies impliziert $\alpha_{j,S} \subset \alpha_{1,S}$; $\phi_{\mu,S}\colon T_{j,S} \to T_{1,S}$ sei der eindeutig bestimmte S-Algebra-Homomorphismus. Wir zeigen:

(4) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \otimes_{\eta_S}(T_{j,S}) & \xrightarrow{\varphi_{j,S}} & T_j \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \otimes_{\eta_S}(\phi_{\mu,S})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_\mu} \\ \otimes_{\eta_S}(T_{1,S}) & \xrightarrow{\varphi_{1,S}} & T_1 \end{array}$$

ist für jedes $S \in M(\hat{R})$ kommutativ.

Beweis:
Die Beziehung

$$\varphi_{1,S}\circ\mathfrak{M}_{\eta_S}(\phi_{\mu,S})\circ\gamma^{S,2}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}} = \phi_\mu\circ\varphi_{j,S}\circ\gamma^{S,2}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}}$$

ist als Verträglichkeitsrelation für Strukturmorphismen automatisch erfüllt, so daß

$$\varphi_{1,S}\circ\mathfrak{M}_{\eta_S}(\phi_{\mu,S})\circ\gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}} = \phi_\mu\circ\varphi_{j,S}\circ\gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}}$$

zu zeigen bleibt. Unter Beachtung der Surjektivität von $\Theta_{j,S}$ folgt dies aus

$$\begin{aligned}
&\varphi_{1,S}\circ\mathfrak{M}_{\eta_S}(\phi_{\mu,S})\circ\gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}}\circ\Theta_{j,S} \;=\\
&\quad= \varphi_{1,S}\circ\gamma^{S,1}_{T_{1,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}}\circ\phi_{\mu,S}\circ\Theta_{j,S}\\
&\quad= \varphi_{1,S}\circ\gamma^{S,1}_{T_{1,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}}\circ\Theta_{1,S}\\
&\quad\overset{(1)}{=} \eta_{1,S}\circ\Theta_{1,S}\\
&\quad= \Theta_1\circ\eta_S\\
&\quad= \phi_\mu\circ\eta_{j,S}\circ\Theta_{j,S}\\
&\quad\overset{(1)}{=} \phi_\mu\circ\varphi_{j,S}\circ\gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}}\circ\Theta_{j,S}\,.
\end{aligned}$$

Wir benutzen nochmals die Tatsache, daß die Homomorphismenmengen in Kategorien der Form $C_q\langle S\rangle$ höchstens einelementig sind. Dies garantiert, daß für jedes $S \in M(\hat{R})$ durch

$$\Delta_S\colon j \longmapsto T_{j,S}\,,\quad \mu \longmapsto \phi_{\mu,S}$$

ein Diagramm vom Typ K in $C_q\langle S\rangle$ definiert wird. Nach (4) ist

$$\delta_S := (\varphi_{j,S})_{j\in|K|} : \mathfrak{M}_{\eta_S}\circ\Delta_S \to \Delta$$

eine natürliche Transformation. Da K endlich ist, gibt es ein $S_1 \in M(\hat{R})$ mit $S_1 \supset S(j)\ \forall\, j \in |K|$. Für $S \supset S_1$ ist δ_S nach (3) sogar ein Isomorphismus. Dies beweist die Behauptung des Satzes.

(14.2)Corollar 1

Ist R noethersch und K eine endliche Kategorie, so ist der Isomorphieklassenfunktor D des Kategoriensystems $[K,\underline{B}_q]$ ausschöpfend.

Beweis:
Sei $\omega \in D(\hat{R})$ und $\Delta: K \to C_q\langle\hat{R}\rangle$ ein Repräsentant von ω. Nach Satz (14.1) existieren ein $S \in M(\hat{R})$ und ein Diagramm Δ_S vom Typ K in $C_q\langle S\rangle$ mit $\otimes\eta_S \circ \Delta_S \simeq \Delta$. Hieraus folgt

$$\omega = [\Delta] = [\otimes\eta_S \circ \Delta_S] = D(\eta_S)([\Delta_S]).$$

Somit ist D ausschöpfend.

(14.3)Corollar 2

Sei R noethersch. K^* eine Unterkategorie der endlichen Kategorie K, $\Phi: [K,\underline{B}_q] \to [K^*,\underline{B}_q]$ der in (3.7) angegebene Morphismus von Kategoriensystemen und $\pi_1: \mathrm{Ass}[K^*,\underline{B}_q] \to [K^*,C]$ der kanonische Funktor (3.5). Es gilt

$$(\eta_S, \Phi_{\hat{R}}(\delta_S)) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}[K^*,\underline{B}_q]}(\Phi_S(\Delta_S), \Phi_{\hat{R}}(\Delta))$$

und $\pi_1(\eta_S, \Phi_{\hat{R}}(\delta_S)) = (\eta_{j,S})_{j \in |K^*|}$
(Bezeichnungen wie in (14.1)).

Beweis:
Es gilt

$$\pi_1(\eta_S, \Phi_{\hat{R}}(\delta_S)) \overset{(3.5)}{=} (\pi_o(\eta_S, \Phi_{\hat{R}}(\delta_S)_j))_{j \in |K^*|}$$

$$\overset{(2.6)}{=} (\Phi_{\hat{R}}(\delta_S)_j \circ \gamma^{S,1}_{\Phi_S(\Delta_S)(j)}, \tilde{\hat{R}}_{\eta_S})_{j \in |K^*|}$$

$$= (\eta_{j,S} \circ \gamma^{S,1}_{T_{j,S}}, \tilde{\hat{R}}_{\eta_S})_{j \in |K^*|}$$

$$\overset{(14.1)}{=} (\eta_{j,S})_{j \in |K^*|}.$$

Wir beweisen ein Analogon von (14.1) für Diagramm vom Typ K in $C_{et}\langle R\rangle$:

(14.4)Satz Sei R noethersch, K eine endliche Kategorie und
==== $\Delta: K \to C_{et}\langle\hat{R}\rangle$ ein Diagramm vom Typ K in der Kategorie der $\hat{R}$-Algebren von endlichem Typ. Dann existieren ein $S_1 \in M(\hat{R})$ und für jedes $S \in M(\hat{R})$, $S_1 \subset S$ ein Diagramm

$$\Delta_S: K \to C_{et}\langle S\rangle$$

mit $\otimes_{\varphi_S} \circ \Delta_S \simeq \Delta$.

Beweis:
Für $j \in |K|$ sei $\bar{T}_{j\theta_j} = T_j := \Delta(j)$. Wir wählen N so groß, daß jede Algebra T_j als Quotient von $\hat{R}[x]$ $(x=(x_1,\dots,x_N))$ geschrieben werden kann; $\varepsilon_j: \hat{R}[x] \to T_j$ sei ein Epimorphismus. Ferner sei $\chi_S: \otimes_{\varphi_S}(S[x]) \to \hat{R}[x]$ der kanonische Isomorphismus aus Satz (6.10). Mit den Bezeichnungen aus (6.10) erhalten wir:

$$\tilde{\varphi}_S := \chi_S \circ \gamma^{S,1}_{S[x],\hat{R}\varphi_S} \overset{(6.1.2)}{=} \chi_S \circ \pi \circ \gamma^{k,1}_{|S|[x],|\hat{R}|}$$

$$= \phi \circ \gamma^{k,1}_{|S|[x],|\hat{R}|} = \varphi_S \underset{k}{\otimes} \mathrm{id} \overset{(5.4)}{=} \varphi_S \otimes \mathrm{id} \quad (\mathrm{id} = \mathrm{id}_{k[x]}).$$

Nun ist γ^1_{S,k_N} nach (6.8) der Strukturmorphismus von $S[x]$ über S_{id_S} ; also folgt

$$\varepsilon_j \circ \tilde{\varphi}_S \in \mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(S[x], \bar{T}_{j\theta_j} \circ \varphi_S).$$

Es sei

$$\alpha_{j,S} := \ker \varepsilon_j \circ \tilde{\varphi}_S$$

$$T_{j,S} := S|x|/\alpha_{j,S}$$

und $\varepsilon_{j,S}: S[x] \to T_{j,S}$ die Projektion.

Es existiert genau ein S-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi_{j,S}: T_{j,S} \to \bar{T}_{j\theta_j} \circ \varphi_S$$

mit

(1) $\varphi_{j,S} \circ \varepsilon_{j,S} = \varepsilon_j \circ \tilde{\varphi}_S$.

Darüber hinaus gibt es zum Paar

$$(\eta_{j,S},\theta_j) \in \mathrm{Hom}_{C<S>}(T_{j,S},\tilde{T}_{j\theta_j}\circ\eta_S)\times\mathrm{Hom}_{C<S>}(\tilde{\hat{R}}_{\eta_S},\tilde{T}_{j\theta_j}\circ\eta_S)$$

genau einen S-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi_{j,S}\colon T_{j,S}\otimes_S \tilde{\hat{R}}_{\eta_S} \longrightarrow \tilde{T}_{j\theta_j}\circ\eta_S$$

mit

(2) $\varphi_{j,S}\circ\gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}} = \eta_{j,S}$

(3) $\varphi_{j,S}\circ\gamma^{S,2}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}} = \theta_j$.

Aus (3) folgern wir

$$\varphi_{j,S} \in \mathrm{Hom}_{C<\hat{R}>}(\otimes_{\eta_S}(T_{j,S}),T_j).$$

Wie in (14.1) behaupten wir:

(4) $\exists S(j) \in M(\hat{R})$: $\varphi_{j,S}$ ist ein Isomorphismus für $S \supset S(j)$.

Da R noethersch ist, ist auch $\hat{R}[x]$ noethersch; es gelte

$$\ker \varepsilon_j = \{\sum_{|\underline{\nu}|=0}^{n(\varkappa)} \hat{r}_{\varkappa,\underline{\nu}}x^{\underline{\nu}} \mid \varkappa = 1,\dots,\varkappa_0\}.|R|[x] .$$

Wir wählen $S(j) \in M(\hat{R})$ so, daß

$$\hat{r}_{\varkappa,\underline{\nu}} \in |S(j)| \quad \text{für } \varkappa = 1,\dots,\varkappa_0,\ |\underline{\nu}| = 0,\dots,n(\varkappa) .$$

Für jedes $S \supset S(j)$ gilt dann $\sum_{|\underline{\nu}|=0}^{n(\varkappa)} \hat{r}_{\varkappa,\underline{\nu}}x^{\underline{\nu}} \in |S|[x]$ und

$$\tilde{\eta}_S(\sum_{|\underline{\nu}|=0}^{n(\varkappa)} \hat{r}_{\varkappa,\underline{\nu}}x^{\underline{\nu}}) = \sum_{|\underline{\nu}|=0}^{n(\varkappa)} \hat{r}_{\varkappa,\underline{\nu}}x^{\underline{\nu}} .$$

Es folgt $\sum_{|\underline{\nu}|=0}^{n(\varkappa)} \hat{r}_{\varkappa,\underline{\nu}}x^{\underline{\nu}} \in \mathcal{O}_{j,S}$ und somit

$$(\varepsilon_{j,S}\otimes_S \mathrm{id}_{\tilde{\hat{R}}_{\eta_S}})\circ(\chi_S)^{-1}(\sum_{|\underline{\nu}|=0}^{n(\varkappa)} \hat{r}_{\varkappa,\underline{\nu}}x^{\underline{\nu}}) =$$

$$= (\varepsilon_{j,S} \underset{S}{\otimes} \mathrm{id}_{\tilde{\hat{R}}\eta_S}) \circ \gamma^{S,1}_{S[x],\tilde{\hat{R}}\eta_S} \Big(\sum_{|\underline{\nu}|=0}^{n(\kappa)} \hat{r}_{\kappa,\underline{\nu}} x^{\underline{\nu}} \Big)$$

$$= \gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S} \circ \varepsilon_{j,S} \Big(\sum_{|\underline{\nu}|=0}^{n(\kappa)} \hat{r}_{\kappa,\underline{\nu}} x^{\underline{\nu}} \Big) = 0 .$$

Deshalb existiert genau ein

$$\bar{\varphi}_{j,S} \in \mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(\tilde{T}_{j\theta_j \circ \eta_S}, T_{j,S} \underset{S}{\otimes} \tilde{\hat{R}}\eta_S)$$

mit

$$(5)\quad \bar{\varphi}_{j,S} \circ \varepsilon_j = (\varepsilon_{j,S} \underset{S}{\otimes} \mathrm{id}_{\tilde{\hat{R}}\eta_S}) \circ (\chi_S)^{-1} .$$

Wegen

$$\bar{\varphi}_{j,S} \circ \theta_j \circ \eta_S = \text{Strukturmorphismus von } T_{j,S} \underset{S}{\otimes} \tilde{\hat{R}}\eta_S$$

$$= \gamma^{S,2}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S} \circ \eta_S$$

gilt $\bar{\varphi}_{j,S} \circ \Theta_j = \gamma^{S,2}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S}$,

denn $|R|$ liegt dicht in $|\hat{R}|$. Es ist also

$$\bar{\varphi}_{j,S} \in \mathrm{Hom}_{C\langle\hat{R}\rangle}(T_j, \Phi\eta_S(T_{j,S})).$$

Wir weisen

(i) $\bar{\varphi}_{j,S} \circ \varphi_{j,S} = \mathrm{id}_{\Phi\eta_S(T_{j,S})}$

und

(ii) $\varphi_{j,S} \circ \bar{\varphi}_{j,S} = \mathrm{id}_{T_j}$

nach! Die erste Behauptung folgt aus

$$\bar{\varphi}_{j,S} \circ \varphi_{j,S} \circ \gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S} \circ \varepsilon_{j,S} \overset{(2)}{=} \bar{\varphi}_{j,S} \circ \eta_{j,S} \circ \varepsilon_{j,S}$$

$$\overset{(1)}{=} \bar{\varphi}_{j,S} \circ \varepsilon_j \circ \tilde{\eta}_S \overset{(5)}{=} (\varepsilon_{j,S} \underset{S}{\otimes} \mathrm{id}_{\tilde{\hat{R}}\eta_S}) \circ (\chi_S)^{-1} \circ \tilde{\eta}_S$$

$$= (\varepsilon_{j,S} \underset{S}{\otimes} \mathrm{id}_{\tilde{\hat{R}}\eta_S})\circ \gamma^{S,1}_{S[x],\tilde{\hat{R}}\eta_S} = \gamma^{S,1}_{T_j,S,\tilde{\hat{R}}\eta_S}\circ \varepsilon_{j,S} \ .$$

Aussage (ii) ist eine Konsequenz aus

$$\varphi_{j,S}\circ\bar{\varphi}_{j,S}\circ\varepsilon_j\circ\chi_S\circ\gamma^{S,1}_{S[x],\tilde{\hat{R}}\eta_S}$$

$$\overset{(5)}{=} \varphi_{j,S}\circ(\varepsilon_{j,S} \underset{S}{\otimes} \mathrm{id}_{\tilde{\hat{R}}\eta_S})\circ\gamma^{S,1}_{S[x],\tilde{\hat{R}}\eta_S}$$

$$= \varphi_{j,S}\circ\gamma^{S,1}_{T_j,S,\tilde{\hat{R}}\eta_S}\circ\varepsilon_{j,S} \overset{(2)}{=} \eta_{j,S}\circ\varepsilon_{j,S}$$

$$\overset{(1)}{=} \varepsilon_j\circ\chi_S\circ\gamma^{S,1}_{S[x],\tilde{\hat{R}}\eta_S} \ .$$

Mit (i) und (ii) ist (4) bewiesen.

Sei nun $\mu \in \mathrm{Hom}_K(j,1)$ und $\Phi_\mu := \Delta(\mu)$. Offensichtlich existiert ein $\hat{R}$-Algebra-Homomorphismus $\tilde{\Phi}_\mu$, derart daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{R}[x] & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_\mu} & \hat{R}[x] \\ {\scriptstyle\varepsilon_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon_1} \\ T_j & \xrightarrow{\Phi_\mu} & T_1 \end{array}$$

kommutativ wird. Wir behaupten:

(6) Es existieren ein $S(\mu) \in M(\hat{R})$ und für jedes $S \supset S(\mu)$ ein S-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{\Phi}_{\mu,S}: S[x] \longrightarrow S[x]$$

mit $\tilde{\Phi}_\mu\circ\chi_S = \chi_S\circ\infty_{\gamma_S}(\tilde{\Phi}_{\mu,S})$.

Der Beweis der Aussage (4) zeigt, daß wir zu

$$\tilde{\Phi}_\mu(x_1),\ldots,\tilde{\Phi}_\mu(x_N) \in |\hat{R}|[x]$$

ein $S(\mu) \in M(\hat{R})$ mit

$$\tilde{\Phi}_\mu(x_1),\ldots,\tilde{\Phi}_\mu(x_N) \in |S|[x] \quad \forall S \supset S(\mu)$$

finden können. Offensichtlich ist $\tilde{\Phi}_\mu(x_\nu) \in (\mathfrak{s},(x))$, so daß durch $x_\nu \longmapsto \tilde{\Phi}_\mu(x_\nu)$ ein S-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{\Phi}_{\mu,S}\colon S[x] \longrightarrow S[x]$$

bestimmt wird. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\chi_S \circ \mathfrak{W}_{\eta_S}(\tilde{\Phi}_{\mu,S}) \circ \gamma_S^{S}{}_{[x]}^{1}, \tilde{\tilde{R}}_{\eta_S}(x_\nu) \\
&= \chi_S \circ \gamma_S^{S}{}_{[x]}^{1}, \tilde{\tilde{R}}_{\eta_S} \circ \tilde{\Phi}_{\mu,S}(x_\nu) \\
&= \tilde{\eta}_S \circ \tilde{\Phi}_{\mu,S}(x_\nu) \\
&= \tilde{\Phi}_{\mu}(x_\nu) \\
&= \tilde{\Phi}_{\mu} \circ \tilde{\eta}_S(x_\nu) \\
&= \tilde{\Phi}_{\mu} \circ \chi_S \circ \gamma_S^{S}{}_{[x]}^{1}, \tilde{\tilde{R}}_{\eta_S}(x_\nu).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt offensichtlich (6).

(7) Sei $S \supset S(\mu)$. Es existiert genau ein

$$\Phi_{\mu,S}\colon T_{j,S} \longrightarrow T_{1,S}$$

mit $\Phi_{\mu,S} \circ \varepsilon_{j,S} = \varepsilon_{1,S} \circ \tilde{\Phi}_{\mu,S}$.

Zum Nachweis reicht es, $\varepsilon_{1,S} \circ \tilde{\Phi}_{\mu,S} | \alpha_{j,S} = 0$ zu verifizieren. Da die in (1) konstruierte Abbildung $\varphi_{1,S}$ offensichtlich injektiv ist, folgt dies aus

$$\begin{aligned}
\eta_{1,S} \circ \varepsilon_{1,S} \circ \tilde{\Phi}_{\mu,S} &\overset{(1)}{=} \varepsilon_1 \circ \tilde{\eta}_S \circ \tilde{\Phi}_{\mu,S} \\
&= \varepsilon_1 \circ \chi_S \circ \mathfrak{W}_{\eta_S}(\tilde{\Phi}_{\mu,S}) \circ \gamma_S^{S}{}_{[x]}^{1}, \tilde{\tilde{R}}_{\eta_S} \\
&\overset{(6)}{=} \varepsilon_1 \circ \tilde{\Phi}_{\mu} \circ \chi_S \circ \gamma_S^{S}{}_{[x]}^{1}, \tilde{\tilde{R}}_{\eta_S} \\
&= \Phi_{\mu} \circ \varepsilon_j \circ \tilde{\varphi}_S .
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun:

(8) Für $S \supset S(\mu)$ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{W}_{\eta_S}(T_{j,S}) & \xrightarrow{\varphi_{j,S}} & T_j \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{W}_{\eta_S}(\Phi_{\mu,S})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_\mu} \\
\mathfrak{W}_{\eta_S}(T_{1,S}) & \xrightarrow{\varphi_{1,S}} & T_1
\end{array}$$

kommutativ.

Es gilt

$$\phi_\mu \circ \varphi_{j,S} \circ \gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{R}\eta_S} \circ \varepsilon_{j,S}$$

$$\overset{(2)}{=} \phi_\mu \circ \eta_{j,S} \circ \varepsilon_{j,S}$$

$$\overset{(1)}{=} \phi_\mu \circ \varepsilon_j \circ \tilde{\eta}_S$$

$$= \varepsilon_1 \circ \tilde{\phi}_\mu \circ \chi_S \circ \gamma^{S,1}_{S[x],\tilde{R}\eta_S}$$

$$\overset{(6)}{=} \varepsilon_1 \circ \chi_S \circ \otimes_{\eta_S}(\tilde{\phi}_{\mu,S}) \circ \gamma^{S,1}_{S[x],\tilde{R}\eta_S}$$

$$= \varepsilon_1 \circ \chi_S \circ \gamma^{S,1}_{S[x],\tilde{R}\eta_S} \circ \tilde{\phi}_{\mu,S}$$

$$\overset{(1)}{=} \eta_{1,S} \circ \varepsilon_{1,S} \circ \tilde{\phi}_{\mu,S}$$

$$\overset{(7)}{=} \eta_{1,S} \circ \phi_{\mu,S} \circ \varepsilon_{j,S}$$

$$\overset{(2)}{=} \varphi_{1,S} \circ \gamma^{S,1}_{T_{1,S},\tilde{R}\eta_S} \circ \phi_{\mu,S} \circ \varepsilon_{j,S}$$

$$= \varphi_{1,S} \circ \otimes_{\eta_S}(\phi_{\mu,S}) \circ \gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{R}\eta_S} \circ \varepsilon_{j,S} .$$

Hieraus folgt offensichtlich (8).

(9) Wir wählen S_1 so, daß

$$S(j) \subset S_1 \ , \ S(\mu) \subset S_1 \quad \forall j \in |K| , \ \mu \in \mathrm{Mor}K.$$

Dann wird für $S \supset S_1$ durch

$$\Delta_S : j \mapsto T_{j,S} \ , \ \mu \mapsto \phi_{\mu,S}$$

ein Diagramm $\Delta_S : K \to C_{et}\langle S\rangle$ definiert.

Für $S \supset S_1$ sind die Homomorphismen $\varphi_{j,S}$ $(j \in |K|)$ nach (4) Isomorphismen. Folglich erhalten wir aus (8) die Beziehungen

$$\otimes_{\eta_S}(\phi_{\lambda,S} \circ \phi_{\mu,S}) = \otimes_{\eta_S}(\phi_{\lambda\circ\mu,S})$$

$\forall (\lambda,\mu) \in \mathrm{Hom}_K(l,m) \times \mathrm{Hom}_K(j,l)$ bzw.

$$\otimes\eta_S(\phi_{id_j,S}) = id_{\otimes\eta_S(T_{j,S})} = \otimes\eta_S(id_{T_{j,S}})$$

$\forall\, j \in |K|$; denn Δ ist nach Voraussetzung ein Funktor. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\gamma^{S,1}_{T_{m,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S} \circ (\phi_{\lambda,S} \circ \phi_{\mu,S}) \\
&\quad = \otimes\eta_S(\phi_{\lambda,S} \circ \phi_{\mu,S}) \circ \gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S} \\
&\quad = \otimes\eta_S(\phi_{\lambda\circ\mu,S}) \circ \gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S} \\
&\quad = \gamma^{S,1}_{T_{m,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S} \circ \phi_{\lambda\circ\mu,S}
\end{aligned}$$

bzw. $\gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S} \circ \phi_{id_j,S} = \gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S} \circ id_{T_{j,S}}$.

Da $\eta_{j,S}$ für jedes j injektiv ist, ist $\gamma^{S,1}_{T_{j,S},\tilde{\hat{R}}\eta_S}$ nach (2) ebenfalls für jedes j injektiv. Damit folgt die Behauptung (9). Definieren wir $\delta_S := (\varphi_{j,S})_{j\in|K|}$, so gewinnen wir für $S \supset S_1$ einen Isomorphismus $\otimes\eta_S \circ \Delta_S \xrightarrow{\sim} \Delta$; dies beweist die Aussage des Satzes.

Analog (14.2) bzw. (14.3) erhalten wir:

(14.5) Corollar 1

Ist R noethersch und K eine endliche Kategorie, so ist der Isomorphieklassenfunktor D des Kategoriensystems $[K,\underline{B}_{et}]$ ausschöpfend.

(14.6) Corollar 2

Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in (14.4). Ist K^* eine Unterkategorie von K, $\Phi : [K,\underline{B}_{et}] \longrightarrow [K^*,\underline{B}_{et}]$ der in (3.7) angegebene Morphismus und $\pi_1 : \mathrm{Ass}[K^*,\underline{B}_{et}] \longrightarrow [K^*,C]$ der kanonische Funktor (3.5), so gilt

$$(\eta_S, \phi_{\hat{R}}(\delta_S)) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ass}[K^*,\underline{B}_{et}]}(\phi_S(\Delta_S), \phi_{\hat{R}}(\Delta))$$

und $\pi_1(\eta_S, \phi_{\hat{R}}(\delta_S)) = (\eta_{j,S})_{j\in|K^*|}$.

Verbinden wir (14.2) und (14.5) mit (13.2) und (13.4), so erhalten wir:

(14.7)Folgerung

R erfülle die Voraussetzungen (13.3.4) des Artinschen Approximationssatzes. Ist K eine endliche Kategorie, so sind die Isomorphieklassenfunktoren der Systeme $[K,\underline{B}_q]$ und $[K,\underline{B}_{et}]$ approximierbar.

(14.8)Anmerkung

Auf dem in (14.4) beschriebenen Wege kann man zu $T \in C_e\langle\hat{R}\rangle$ ein $T_S \in C_e\langle S\rangle$ mit $\mathfrak{o}_{\gamma_S}(T_S) \simeq T$ finden. Aus diesem Grunde gewinnt man folgendermaßen weitere Kategoriensysteme mit approximierbaren Isomorphieklassenfunktoren:

Sei K eine endliche Kategorie und K_o eine Unterkategorie von K. Für $S' \in |C|$ sei K(S') die volle Unterkategorie von $[K,C_{et}\langle S\rangle]$ mit

$$|K(S')| = \{\Delta \in |[K,C_{et}\langle S'\rangle]| \mid \Delta|K_o \in |[K_o,C_e\langle S'\rangle]|\}.$$

Dann legt $(K(S'))_{S'\in|C|}$ ein Unterkategoriensystem $\underline{K}$ von $[K,\underline{B}_{et}]$ fest (vgl. Satz(6.14)), und der Isomorphieklassenfunktor von $\underline{K}$ ist approximierbar.

Ist K^* eine Unterkategorie von K_o so erhält man durch Einschränkung des kanonischen Morphismus $[K,\underline{B}_{et}] \to [K^*,\underline{B}_{et}]$ offenbar einen Morphismus $\underline{K} \to [K^*,\underline{B}_e]$. Kategoriensysteme $\underline{K}$ der beschriebenen Art können also stets in Satz (11.2) verwendet werden.

15. Approximierbare Isomorphieklassenfunktoren von Erweiterungen eines Kategoriensystems

(15.1)Seien R und $\underline{B}_o$ wie in (13.3.4) bzw. (11.1); ferner sei $\overline{T}_o \in |C_o\langle\hat{R}\rangle|$ eine vorgegebene Algebra. Wir betrachten wie in (11.2) ein Datensystem $(\underline{K},K^*,\Phi,\Phi^*,E,\overline{\Delta}_o,n_o)$ für $\overline{T}_o$ und eine Liftungsbedingung $(G,\overline{\xi}_o)$ für $\Phi^1_R(\overline{\Delta}_o)$. Mit D bzw. $\check{D}$

bezeichnen wir die Isomorphieklassenfunktoren von $\underline{K}$ bzw. der $(\Phi, G\circ\mathbb{T})$-Erweiterung $\check{\underline{K}}$ von $\underline{K}$. Wir setzen voraus, daß D ausschöpfend ist. Gesucht ist eine Bedingung für die Approximierbarkeit von $\check{D}$.

(15.2) Wir benötigen in nachfolgendem Satz Funktoren G_Δ: $C\langle S\rangle \longrightarrow$ Ens $(S \in |C|, \Delta \in K(S))$, die wir zunächst angeben (die Funktoreigenschaften ergeben sich aus (3.6)):

(1) Sei $T \in |C\langle S\rangle|$ und Θ der Strukturmorphismus von T über S_{id_S}. Dann gilt

$$\Theta \in \mathrm{Hom}_C(S, \bar{T}_{\Theta\circ\sigma}) = \mathrm{Hom}_C(S, \mathbb{T}_o(T)),$$

so daß

$$\otimes_\Theta \circ \phi_S(\Delta) \in |[K^*, C_o\langle \mathbb{T}_o(T)\rangle]|$$

erklärt ist. Es sei

$$G_\Delta(T) := G\circ\mathbb{T}(\otimes_\Theta \circ \phi_S(\Delta)).$$

(2) Seien $T_1, T_2 \in |C\langle S\rangle|$ und $\Psi \in \mathrm{Hom}_{C\langle S\rangle}(T_1, T_2)$. Wegen $\Psi\circ\Theta_1 = \Theta_2$ gilt $\Psi\Theta_1\circ\sigma = \Theta_2\circ\sigma$ und folglich $\Psi \in \mathrm{Hom}_C(\mathbb{T}_o(T_1), \mathbb{T}_o(T_2))$. In dieser Situation ist dem Diagramm $\Phi_S(\Delta)$ der Morphismus

$$\alpha_{\phi_S(\Delta),\Psi,\Theta_1} : \mathbb{T}_1(\otimes_{\Theta_1}\circ\phi_S(\Delta)) \to \mathbb{T}_1(\otimes_{\Psi\circ\Theta_1}\circ\phi_S(\Delta)) = \mathbb{T}_1(\otimes_{\Theta_2}\circ\phi_S(\Delta))$$

zugeordnet (vgl.(3.6)). Es sei

$$G_\Delta(\Psi) := G\circ\mathbb{T}(\alpha_{\phi_S(\Delta),\Psi,\Theta_1}).$$

(15.3) Satz ==== Voraussetzungen wie in (15.1). Seien $\bar{\Delta} \in K(\hat{R})$, $S_1 \in M(\hat{R})$ und $\Delta \in K(S_1)$ so, daß $F_{\eta_{S_1}}(\Delta) \simeq \bar{\Delta}$. Ist der Funktor

$$G_\Delta : C\langle S_1\rangle \to \mathrm{Ens}$$

ausschöpfend (im Sinne von (8.10.1)), so gibt es zu jedem $\bar{\xi} \in G\circ\mathbb{T}(\phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}))$ ein $S_2 \in M(\hat{R})$, $S_2 \supset S_1$ und für alle $S \in M(\hat{R})$, $S \supset S_2$ ein $(\Delta_S, \xi_S) \in \check{K}(S)$ mit

$$\check{F}_{\eta_S}(\Delta_S, \xi_S) \simeq (\bar{\Delta}, \bar{\xi}).$$

Beweis:
Sei $\bar{\xi} \in G \circ \mathbb{T}(\Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta}))$ gegeben. Ein Isomorphismus $\delta\colon F_{\eta_{S_1}}(\Delta) \xrightarrow{\sim} \bar{\Delta}$ induziert den Isomorphismus

$$\Phi_{\hat{R}}(\delta)\colon \Phi_{\hat{R}} \circ F_{\eta_{S_1}}(\Delta) = \otimes_{\eta_{S_1}} \circ \Phi_{S_1}(\Delta) \xrightarrow{\sim} \Phi_{\hat{R}}(\bar{\Delta});$$

also gilt

$$G \circ \mathbb{T} \circ I_{\hat{R}}(\Phi_{\hat{R}}(\delta)^{-1})(\bar{\xi}) \in G \circ \mathbb{T}(\otimes_{\eta_{S_1}} \circ \Phi_S(\Delta)) = G_\Delta(\tilde{\hat{R}}_{\eta_{S_1}})$$

(hier sei $I_{\hat{R}}\colon [K^*, C_o\langle \hat{R}\rangle] \longrightarrow \mathrm{Ass}[K^*, \underline{B}_o]$ der natürliche Inklusionsfunktor (1.9)). Sei

$$\bar{\xi}^* \in G^*_\Delta(\hat{R}) \text{ durch } \bar{\xi}^* := \iota_{\eta_{S_1}}(G \circ \mathbb{T}(\Phi_{\hat{R}}(\delta)^{-1})(\bar{\xi}))$$

definiert. Da G^*_Δ ausschöpfend ist, existieren zu $\bar{\xi}^*$ ein $S_2 \in M(\hat{R})$ und für jedes $S \supset S_2$ ein $\xi^*_S \in G^*_\Delta(S)$ mit

$$G^*_\Delta(\eta_S)(\xi^*_S) = \bar{\xi}^*.$$

O.E.d.A. kann offenbar $S_2 \supset S_1$ angenommen werden. Wegen

$$G^*_\Delta(S) = \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S_1, S)} G_\Delta(\tilde{S}_\varphi)$$

existieren zu ξ^*_S ein $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(S_1, S)$ und ein $\xi_S \in G_\Delta(\tilde{S}_\varphi)$ mit

$$\iota_\varphi(\xi_S) = \xi^*_S .$$

Es folgt

$$\bar{\xi}^* = G^*_\Delta(\eta_S)(\xi^*_S) = G^*_\Delta(\eta_S) \circ \iota_\varphi(\xi_S) = \iota_{\eta_S \circ \varphi} \circ G_\Delta(\eta_S)(\xi_S).$$

Offensichtlich ergibt sich zunächst $\eta_S \circ \varphi = \eta_{S_1}$ und somit $\varphi = i_{S_1, S}$; denn für $\eta_S \circ \varphi \neq \eta_{S_1}$ wären die Wertebereiche der Abbildungen $\iota_{\eta_{S_1}}$ und $\iota_{\eta_S \circ \varphi}$ disjunkt. Darüber hinaus erhalten wir

$$\begin{aligned} & G \circ \mathbb{T} \circ I_{\hat{R}}(\Phi_{\hat{R}}(\delta)^{-1})(\bar{\xi}) \\ &= G_\Delta(\eta_S)(\xi_S) \\ &= G \circ \tilde{\mathbb{T}}(\alpha_{\Phi_{S_1}(\Delta)}, \eta_S, i_{S_1, S})(\xi_S) \end{aligned}$$

und damit

$$\overline{\xi} = G\circ\tilde{\pi}(\mathbb{I}_1\circ I_{\hat{R}}(\phi_{\hat{R}}(\delta))\circ\alpha_{\phi_{S_1}(\Delta),\eta_S,i_{S_1,S}})(\xi_S).$$

Nun gilt

$$\mathbb{I}_1\circ I_{\hat{R}}(\phi_{\hat{R}}(\delta)) = \phi_{\hat{R}}(\delta)\circ\alpha_{\phi_{S_1}(\Delta),id_{\hat{R}},\eta_{S_1}} = \phi_{\hat{R}}(\delta),$$

so daß wir

$$\overline{\xi} = G\circ\tilde{\pi}(\phi_{\hat{R}}(\delta)\circ\alpha_{\phi_{S_1}(\Delta),\eta_S,i_{S_1,S}})(\xi_S)$$

für $S \in M(\hat{R})$, $S \supset S_2$ verifiziert haben. Die folgenden Umformungen führen nun auf die gewünschte Aussage:

Es sei $\Delta_S := F_{i_{S_1,S}}(\Delta)$; dann gilt

$$\phi_S(\Delta_S) = \otimes_{i_{S_1,S}}\circ\phi_{S_1}(\Delta)$$

und somit

$$\xi_S \in G_\Delta(\mathfrak{S}_\varphi) = G_\Delta(\mathfrak{S}_{i_{S_1,S}}) = G\circ\pi(\otimes_{i_{S_1,S}}\circ\phi_{S_1}(\Delta))$$
$$= G\circ\pi(\phi_S(\Delta_S)).$$

Der kanonische Isomorphismus $\gamma_{\eta_S,i_{S_1,S},\Delta} : F_{\eta_{S_1}}(\Delta) \to F_{\eta_S}(\Delta_S)$ legt den Isomorphismus

$$\delta_S := \delta\circ(\gamma_{\eta_S,i_{S_1,S},\Delta})^{-1} : F_{\eta_S}(\Delta_S) \xrightarrow{\sim} \overline{\Delta} \quad \text{fest.}$$

Wegen

$$\phi_{\hat{R}}(\delta_S) = \phi_{\hat{R}}(\delta)\circ\phi_{\hat{R}}(\gamma_{\eta_S,i_{S_1,S},\Delta})^{-1}$$
$$\overset{(1.6.3)}{=} \phi_{\hat{R}}(\delta)\circ(\beta_{\eta_S,i_{S_1,S}}\circ\phi_{S_1}(\Delta))^{-1}$$

und $\alpha_{\phi_{S_1}(\Delta),\eta_S,i_{S_1,S}} = (\beta_{\eta_S,i_{S_1,S}}\circ\phi_{S_1}(\Delta))^{-1}$
$$\circ\gamma_{\otimes_{i_{S_1,S}}\circ\phi_{S_1}(\Delta),\eta_S}$$

folgt

$$\phi_{\hat{R}}(\delta_S)\circ\gamma_{\phi_S(\Delta_S),\eta_S} = \phi_{\hat{R}}(\delta)\circ\alpha_{\phi_{S_1}(\Delta),\eta_S,i_{S_1,S}}$$

und $G\circ\tilde{\pi}(\phi_{\hat{R}}(\delta_S)\circ\gamma_{\phi_S(\Delta_S),\eta_S})(\xi_S) = \overline{\xi}$.

Nun hat man folgende Äquivalenzen:

$$\delta_S \in \mathrm{Hom}_{K(R)}(\check{F}_{\eta_S}(\Delta_S,\xi_S),(\overline{\Delta},\overline{\xi}))$$

$$\overset{(1.10.2)}{=} \mathrm{Hom}_{\check{K}(\hat{R})}((F_{\eta_S}(\Delta_S), G\circ\mathbb{T}\circ\underline{\Phi}(\eta_S, id_{F_{\eta_S}(\Delta_S)})(\xi_S),(\overline{\Delta},\overline{\xi}))$$

$$\overset{(1.10.1)}{\Longleftrightarrow} (G\circ\mathbb{T}\circ\underline{\Phi}\circ I_{\hat{R}}(\delta_S))\circ(G\circ\mathbb{T}\circ\underline{\Phi}(\eta_S, id_{F_{\eta_S}(\Delta_S)}))\ (\xi_S) = \overline{\xi}$$

$$\Longleftrightarrow \quad G\circ\mathbb{T}\circ\underline{\Phi}(I_{\hat{R}}(\delta_S)\circ(\eta_S, id_{F_{\eta_S}(\Delta_S)}))(\xi_S) = \overline{\xi}.$$

Mit $I_{\hat{R}}(\delta_S)\circ(\eta_S, id_{F_{\eta_S}(\Delta_S)})$

$$\overset{(1.9)}{=} (id_{\hat{R}}, \delta_S\circ(\eta_{\hat{R}}, F_{\eta_S}(\Delta_S))^{-1})\circ(\eta_S, id_{F_{\eta_S}(\Delta_S)})$$

$$\overset{(1.7.3)}{=} (\eta_S, \delta_S\circ(\eta_{\hat{R}}, F_{\eta_S}(\Delta_S))^{-1}\circ F_{id_{\hat{R}}}(id_{F_{\eta_S}(\Delta_S)})\circ\eta_{id_{\hat{R}}}, \eta_S, \Delta_S)$$

$$= (\eta_S, \delta_S\circ(\eta_{\hat{R}}, F_{\eta_S}(\Delta_S))^{-1}\circ\eta_{id_{\hat{R}}}, \eta_S, \Delta_S)$$

$$\overset{(1.4.6)(1.5)}{=} (\eta_S, \delta_S)$$

folgt

$$\delta_S \in \mathrm{Hom}_{\check{K}(\hat{R})}(\check{F}_{\eta_S}(\Delta_S,\xi_S),(\overline{\Delta},\overline{\xi}))$$

$$\Longleftrightarrow \quad G\circ\mathbb{T}\circ\underline{\Phi}(\eta_S,\delta_S)(\xi_S) = \overline{\xi}$$

$$\overset{(1.8)}{\Longleftrightarrow} \quad G\circ\mathbb{T}(\eta_S, \phi_{\hat{R}}(\delta_S))(\xi_S) = \overline{\xi}$$

$$\overset{(3.5)(2.6)}{\Longleftrightarrow} \quad G\circ\mathbb{T}(\phi_{\hat{R}}(\delta_S)\circ\gamma_{\Phi_S(\Delta_S)}, \eta_S)(\xi_S) = \overline{\xi}.$$

Somit ist δ_S ein Isomorphismus von $\check{K}(\hat{R})$-Objekten. Dies beweist die Aussagen des Satzes.

Offensichtlich gibt Satz (15.3) eine Bedingung für die Approximierbarkeit vom $\check{D}$ an. Wir nutzen das bei der Approximation von $[(\overline{\Delta}_o,\overline{\xi}_o)]$ aus und erhalten durch Verbindung mit der formalen Algebraisierung (11.2) folgenden Satz:

(15.4)Satz Seien R und $\underline{B}_o$ wie in (13.3.4) bzw.(11.1) und $\overline{T}_o \in |C_o\langle\hat{R}\rangle|$ eine vorgegebene Algebra. Ferner sei $(\underline{K}, K^*, \Phi, \Phi^*, E, \overline{\Delta}_o, n_o)$ ein Datensystem für $\overline{T}_o$ und $(G, \overline{\xi}_o)$ eine Liftungsbedingung für $\Phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o)$. Es existiere

ein $S \in M(\hat{R})$,

ein Datum $\Delta_S \in |K(S)|$,

ein Isomorphismus δ_S: $F_{\eta_S}(\Delta_S) \longrightarrow \overline{\Delta}_o$

und ein Element $\xi_S \in G\circ\overline{\Pi}(\Phi_S(\Delta_S))$ mit

$$G\circ\tilde{\Pi}(\Phi_{\hat{R}}(\delta_S)\circ\gamma_{\Phi_S(\Delta_S),\eta_S})(\xi_S) = \overline{\xi}_o.$$

ε: $R[x] \longrightarrow S$ sei ein Epimorphismus. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiere eine Lösung $\underline{r}(n) \in L_{ker\varepsilon}(R)$ mit

$$L_{ker\varepsilon}(\tau_n)(\underline{r}(n)) = L_{ker\varepsilon}(\zeta_n)(\varepsilon(x))$$

und $F_{\Phi_{i(\underline{r}(n))}}(\Delta_S) \in E$.

Dann existiert ein $T_o \in |C_o\langle R\rangle|$ mit

$$\widetilde{\otimes_i(T_o)} \simeq \tilde{\overline{T}}_o .$$

Beweis:
Der Beweis folgt offensichtlich aus (11.2), (13.5) und (15.3).

(15.5)Anmerkung

Ist der Isomorphieklassenfunktor D von $\underline{K}$ ausschöpfend, so können für hinreichend große $S \in M(\hat{R})$ stets ein Datum $\Delta_S \in |K(S)|$ und ein Isomorphismus δ_S: $F_{\eta_S}(\Delta_S) \xrightarrow{\sim} \overline{\Delta}_o$ gefunden werden.

Nach (15.3) ist die Existenz eines Elements $\xi_S \in G\circ\overline{\Pi}(\Phi_S(\Delta_S))$ mit $G\circ\tilde{\Pi}(\Phi_{\hat{R}}(\delta_S)\circ\gamma_{\Phi_S(\Delta_S),\eta_S})(\xi_S) = \overline{\xi}_o$ dann gewährleistet, wenn der Funktor G_Δ für ein $\Delta \in |K(S_1)|$ mit $F_{\eta_{S_1}}(\Delta) \simeq \overline{\Delta}_o$ ausschöpfend ist. Schließlich besagt die letzte Forderung in (15.4), daß die in (13.5) angegebene Approximation von $[\overline{\Delta}_o]$ mittels

$[\Delta_S]$ eine Ω-Approximation von $[\overline{\Delta}_o]$ zuläßt (wobei wie in (9.6) $\Omega := \{\overline{\omega} \in D(\hat{R}) | \ \overline{\omega} \subset E\}$ zu setzen ist).

(15.6)Anmerkung
==========

Im Fall der im 14. Abschnitt behandelten Kategoriensysteme $\underline{K}$ können Δ_S, δ_S auf dem in (14.1) bzw. (14.4) beschriebenen Weg gewonnen werden, und die Morphismen $\Phi_{\hat{R}}(\delta_S)\circ\varphi\Phi_S(\Delta_S),\eta_S$ besitzen nach (14.3) bzw. (14.6) die einfache Form $(\eta_{j,S})_{j\in|K^*|}$ mit Homomorphismen $\eta_{j,S}$, die - z.B. im Falle $\underline{B}_o = \underline{B}_q$ - folgendermaßen definiert sind: Sei $T_j \in |C_q\langle\hat{R}\rangle|$ gegeben; man betrachte $\mathfrak{T}_j$ vermöge $\theta_j\circ\eta_S$ als S-Algebra, $\eta_{j,S}$ ist dann der induzierte Homomorphismus $S/\ker\theta_j\circ\eta_S \longrightarrow \mathfrak{T}_{j\theta_j\circ\eta_S}$.

16. Dimensionserhaltende Approximation

(16.1)I.f. sei $X = (X_1,\ldots,X_d)$, $(X) = \{X_1,\ldots,X_d\}.k[X]$, $k[[X]]$ die k-Algebra der formalen Potenzreihen in $X_1,\ldots,X_d$ und

$$\iota: (k[X]_{(X)},(X).k[X]_{(X)}) \longrightarrow (k[[X]],(X).k[[X]])$$

die natürliche Inklusionsabbildung. $(k[[X]],(X).k[[X]])$ ist eine henselsche lokale (k,0)-Algebra (Nagata[1], p.104, Theorem (30.3)). Ist $(k[X]_{(X)},(X).k[X]_{(X)})^h_\varphi$ eine Henselierung von $(k[X]_{(X)},(X).k[X]_{(X)})$, so existiert also genau ein Homomorphismus

$$i: (k[X]_{(X)},(X).k[X]_{(X)})^h \longrightarrow (k[[X]],(X).k[[X]])$$

mit $i\circ\varphi = \iota$. Nach Grothendieck [3], EGAIV, p.137, Théorème (18.6.6.iv) ist die Komplettierung $\hat{\varphi}$ von φ ein Isomorphismus. Setzen wir

$$R := (k[X]_{(X)},(X).k[X]_{(X)})^h_{id},$$

so können wir also

$$(k[[X]],(X).k[[X]])_i$$

als Komplettierung $\hat{R}$ von R ansehen. Wegen $i \circ \varphi = \iota$ können die Elemente $\varphi(X_\mu)$ wieder mit X_μ bezeichnet ($\mu=\lambda,\ldots,d$) werden.

(16.2) Ist K eine (endliche) Kategorie und $\Delta : K \to C_q\langle\hat{R}\rangle$ ein Diagramm vom Typ K in $C_q\langle\hat{R}\rangle$, so ist $\Delta(j)$ für jedes $j \in |K|$ eine lokale Algebra und folglich

$$\dim \Delta := (\dim(j))_{j\in|K|}$$

wohldefiniert. Wir weisen folgenden Satz nach:

(16.3) Satz ====
Es sei K eine endliche Kategorie, $\underline{d} = (d_j)_{j\in|K|}$ eine Familie nicht-negativer ganzer Zahlen und

$$E := \{\Delta \in |[K, C_q\langle\hat{R}\rangle]| \mid \dim\Delta = \underline{d}\}.$$

Ferner sei D der Isomorphieklassenfunktor von $[K, \underline{B}_q]$ und $\Omega := \{\overline{\omega} \in D(\hat{R}) \mid \overline{\omega} \subset E\}$. Dann ist D Ω-approximierbar.

Beweis:
(1) Sei $\overline{\omega} \in \Omega$ gegeben. Nach Satz (14.1) existieren ein $S \in M(\hat{R})$ und ein Diagramm Δ_S: $K \to C_q\langle S\rangle$ mit $[\otimes\eta_S \circ \Delta_S] = \overline{\omega}$. Wir setzen $T_j := \Delta_S(j)$ und bezeichnen den Strukturmorphismus von T_j über S_{id_S} mit Θ_j. Ferner sei ε: $R[x] \to S$ ein Epimorphismus ($x = (x_1,\ldots,x_N)$); es gelte $\ker\varepsilon = \{p_1,\ldots,p_l\}.|R|[x]$ und $\ker\Theta_j \circ \varepsilon = \{p_{j1},\ldots,p_{je(j)}\}.|R|[x]$. O.E.d.A. kann offenbar $e(j) = e \ \forall j \in |K|$ angenommen werden.

Den Strukturmorphismus von $\otimes\eta_S(T_j)$ bezeichnen wir kurz mit γ_j. Nach (6.6) gilt

$$\ker\gamma_j = \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} (\eta_S(\ker\Theta_j).|\hat{R}| + \hat{\mathfrak{m}}^\nu)$$
$$= \eta_S(\ker\Theta_j).|\hat{R}|$$
$$= \{p_{j1}(\varepsilon(x)),\ldots,p_{je}(\varepsilon(x))\}.|\hat{R}|.$$

(2) Wegen $\dim \otimes\eta_S(T_j) = d_j$ gibt es Elemente

$$h_{j1},\ldots,h_{jd_j} \in |\hat{R}| \quad (j \in |K|),$$

derart daß $\{\gamma_j(h_{j1}),\ldots,\gamma_j(h_{jd_j})\}$ ein System von Parametern

für $\otimes_{\gamma_S}(T_j)$ bilden. Also existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}$ mit

$$\gamma_j(X_\mu^\alpha) \in \{\gamma_j(h_{j1}),\ldots,\gamma_j(h_{jd_j})\}.|\otimes_{\gamma_S}(T_j)|$$

$\forall\ j \in |K|$, $\mu=1,\ldots,d$. Wir können deshalb nach (1) Elemente

$$h_{j\mu w}\ ,\ h^*_{j\mu u} \in |\hat{R}| \quad (j\in|K|,\mu=1,\ldots,d,w=1,\ldots,d_j,u=1,\ldots,e)$$

mit $X_\mu^\alpha - \sum_{w=1}^{d_j} h_{j\mu w}.h_{jw} = \sum_{u=1}^{e} h^*_{j\mu u}.p_{ju}(\varepsilon(x))$

finden.

(3) $\dim \otimes_{\gamma_S}(T_j) = d_j$ impliziert andererseits

$$d_j = |\hat{R}|/\ker\gamma_j = tf(\ker\gamma_j)$$
$$= \max\{tf(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Isolker}\,\gamma_j\},$$

wenn tf die Tiefe bzw. Isol die Menge der isolierten Primideale eines Ideals bezeichnet. Wir wählen für jedes $j \in |K|$ ein Ideal $\mathfrak{p}_j \in \mathrm{Isolker}\,\gamma_j$ mit $tf(\mathfrak{p}_j) = d_j$. Nun ist $|\hat{R}|$ als regulärer lokaler Ring gewiß ein Macaulay-Ring, also existieren Elemente

$$y_{j1},\ldots,y_{je_j} \in \mathfrak{p}_j (e_j := d - d_j,\ j \in |K|)$$

die einem System von Parametern für $|\hat{R}|$ angehören (Zariski - Samuel [2], Appendix 6). Wir ergänzen $\{y_{j1},\ldots,y_{je_j}\}$ zu einem System von Parametern $\{y_{j1},\ldots,y_{jd}\}$ für $|\hat{R}|$. Dann existieren ein $\beta \in \mathbb{N}$ und Elemente

$$g_{j\mu v} \in |\hat{R}| \quad (j\in|K|,\mu=1,\ldots,d,v=1,\ldots,d)$$

mit $X_\mu^\beta = \sum_{v=1}^{d} g_{j\mu v}.y_{jv}$.

(4) In der Situation (3) ist $\mathfrak{p}_j$ isoliertes Primideal von

$$\mathfrak{a}_j := \{y_{j1},\ldots,y_{je_j}\}.|\hat{R}|$$

(Zariski - Samuel [2], Appendix 6). Mit $\mathfrak{q}_j$ bezeichnen wir das durch $\mathfrak{p}_j = \mathrm{rad}\,\mathfrak{q}_j$ eindeutig bestimmte Primärideal einer unverkürzbaren Zerlegung von $\mathfrak{a}_j$. Für jedes weitere Primärideal $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}_j$ gilt dann

$$(|\hat{R}| - \mathfrak{p}_j) \cap \mathfrak{q} \neq 0 \iff \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}_j \iff \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_j ;$$

also folgt

$$\mathfrak{q}_j \cdot |\hat{R}|_{\mathfrak{p}_j} = \mathfrak{q}_j \cdot |\hat{R}|_{\mathfrak{p}_j}$$

nach Zariski - Samuel [1],p.225,Theorem17. Andererseits ist $\mathfrak{q}_j \cdot |\hat{R}|_{\mathfrak{p}_j}$ ein Primärideal mit Radikal $\mathfrak{p}_j \cdot |R|_{\mathfrak{p}_j}$ (Zariski - Samuel [1],p.224,Theorem 16). Somit erzeugen $y_{j1},\ldots,y_{je_j}$ ein zum maximalen Ideal von $|\hat{R}|_{\mathfrak{p}_j}$ primäres Ideal. Folglich gibt es ein $\delta \in \mathbb{N}$, derart daß $(p_{ju}(\varepsilon(x)))^{\delta} \in \mathfrak{a}_j \cdot |R|_{\mathfrak{p}_j}$. Dies impliziert die Existenz von Elementen

$$f_j \in |\hat{R}| - \mathfrak{p}_j \ , \ f_{juv} \in |\hat{R}| \quad (j \in |K|, u=1,\ldots,e, v=1,\ldots,e_j)$$

mit $f_j \cdot (p_{ju}(\varepsilon(x)))^{\delta} = \sum_{v=1}^{e_j} f_{juv} \cdot y_{jv}$.

(5) Wegen $f_j \in |\hat{R}| - \mathfrak{p}_j$ existiert ein $n(j) \in \mathbb{N}$ mit

$$f_j + \hat{\mathfrak{w}}^{n(j)} \cap \mathfrak{p}_j = \mathfrak{o} ,$$

denn $\mathfrak{p}_j$ ist in der (metrischen!) $\hat{\mathfrak{w}}$-Topologie von $|\hat{R}|$ abgeschlossen. Es sei $n_1 := \max\{n(j) \mid j \in |K|\}$.

(6) Wir betrachten im Polynomring über $|R|$ in den Unbestimmten

x_ν	
$H_{j\mu w}$	$\nu = 1,\ldots,N$
H_{jw}	$j \subset |K|$
$H^*_{j\mu u}$	$\mu = 1,\ldots,d$
$G_{j\mu v}$	$w = 1,\ldots,d_j$
Y_{jv}	$u = 1,\ldots,e$
F_j	$v = 1,\ldots,d$
F_{juv}	

das nachfolgende Gleichungssystem:

$$0 = p_\lambda(x_1,\ldots,x_N)$$

$$0 = X_\mu^\alpha - \sum_{w=1}^{d_j} H_{j\mu w}\cdot H_{jw} - \sum_{u=1}^{e} H^*_{j\mu u}\cdot p_{ju}(x_1,\ldots,x_N)$$

$$0 = X_\mu^\beta - \sum_{v=1}^{d} G_{j\mu v}\cdot Y_{jv}$$

$$0 = F_j\cdot(p_{ju}(x_1,\ldots,x_N))^\delta - \sum_{v=1}^{e_j} F_{juv}\cdot Y_{jv} \quad .$$

(7) Nach (1),(2),(3),(4) ist

$\ell := (\varepsilon(x_\nu), h_{j\mu w}, h_{jw}, h^*_{j\mu u}, g_{j\mu v}, y_{jv}, f_j, f_{juv})$ Indizes wie oben eine formale Lösung des Systems (6). Nach (13.3.4) können wir zu jedem $n \geq n_1$ eine $|R|$-wertige Lösung

$\ell_n = (r_\nu(n), h_{j\mu wn}, h_{jwn}, h^*_{j\mu un}, g_{j\mu vn}, y_{jvn}, f_{jn}, f_{juvn})$ I.w.o.

mit $i(\ell_n) \equiv \ell \bmod \hat{\mathfrak{M}}^n$ finden.

Wir definieren

$$\underline{r}(n) := (r_1(n),\ldots,r_N(n)) \quad \text{für } n \geq n_1$$

bzw. $\underline{r}(n) := \underline{r}(n_1)$ für $n < n_1$.

Dann hat das Element

$$\omega_n := [\otimes\phi_{\underline{r}(n)}\circ\Delta_S] \in D(R)$$

nach (13.5.5) die Eigenschaft

$$D(\pi_n)(\omega_n) = D(\zeta_n)(\overline{\omega}) \ ,$$

denn $\underline{r}(n)$ erfüllt die erste Gruppe von Gleichungen. Der Beweis des Satzes ist also erbracht, wenn wir

$$[\otimes\phi_{i(\underline{r}(n))}\circ\Delta_S] \in \Omega$$

verifizieren; nach Festlegung der $\underline{r}(n)$ kann dabei $n \geq n_1$ vorausgesetzt werden.

(8) Sei γ_{jn} der Strukturmorphismus von $\mathfrak{S}_{\Phi_{i(\underline{r}(n))}}(\Delta_q)(i) = \mathfrak{S}_{\Phi_{i(\underline{r}(n))}}(T_j)$. Mit (6.6) gilt wieder

$$\ker \gamma_{jn} = \{p_{j1}(\underline{r}(n)),\ldots,p_{je}(\underline{r}(n))\}.|\hat{R}|.$$

Aus der zweiten Gruppe von Gleichungen folgt deshalb sofort, daß $\gamma_{jn}(h_{j1n}),\ldots,\gamma_{jn}(h_{jd_jn})$ ein zum maximalen Ideal von $\mathfrak{S}_{\Phi_{i(\underline{r}(n))}}(T_j)$ primäres Ideal erzeugen. Folglich gilt

$$\dim(\mathfrak{S}_{\Phi_{i(\underline{r}(n))}}(T_j)) \leq d_j \quad .$$

(9) Wir setzen $\sigma_{jn} := \{y_{j1n},\ldots,y_{je_jn}\}.|\hat{R}|$. Die dritte Gruppe von Gleichungen garantiert, daß $\{y_{j1n},\ldots,y_{jdn}\}$ ein System von Parametern für $|\hat{R}|$ bildet. Somit gilt

$$\dim |\hat{R}|/\sigma_{jn} = d - e_j = d_j \ ,$$

und nach einem Satz von I.S.Cohen (Zariski - Samuel [2], p.310,Theorem29 ; oder auch: Appendix6, p.397,Theorem 2) ist σ_{jn} ein ungemischtes Ideal (d.h. dim $|\hat{R}|/\mathfrak{p} = d_j$ für jedes assoziierte Primideal $\mathfrak{p}$ von σ_{jn}),

(10) Sei $\pi_{jn}: |\hat{R}| \longrightarrow |\hat{R}|/\sigma_{jn}$ die Projektion; dann gilt

$$\pi_{jn}(f_{jn}) \neq 0.$$

Wir weisen dies indirekt nach. Im Falle $\pi_{jn}(f_{jn}) = 0$ existieren $\hat{r}_1,\ldots,\hat{r}_{e_j} \in |\hat{R}|$ mit

$$f_{jn} = \sum_{v=1}^{e_j} \hat{r}_v \, y_{jvn}.$$

Offensichtlich gilt

$$\sum_{v=1}^{e_j} \hat{r}_v(y_{jv} - y_{jvn}) \in \hat{\mathfrak{M}}^n \ ,$$

$$\sum_{v=1}^{e_j} \hat{r}_v \cdot y_{jv} \in \mathfrak{p}_j \ .$$

Also hat das Element

$$f_j^* := f_j - f_{jn} - \sum_{v=1}^{e_j} \hat{r}_v (y_{jv} - y_{jvn}) \in \hat{W}^n$$

die Eigenschaft $f_j - f_j^* \in \mathfrak{p}_j$. Ein Widerspruch zur Wahl von n_1 in (5) !

(11) Aus der vierten Gruppe von Gleichungen erhalten wir

$$\tau_{jn}(f_{jn}) \cdot (\pi_{jn}(p_{ju}(\underline{r}(n))))^{\delta} = 0 \ , \ u = 1,\ldots,e$$

Mit (10) folgt, daß $\pi_{jn}(p_{ju}(\underline{r}(n)))$ ein Nullteiler ist. Also ist $\ker\gamma_{jn}$ in einem assoziierten Primideal $\mathfrak{P}$ von α_{jn} enthalten (Abhyankar [1],p.154,(18&.3)). Dies impliziert

$$\dim\left(\otimes\phi_{i(\underline{r}(n))}(T_j)\right) \geq \dim|\hat{R}|/\mathfrak{P} \overset{(9)}{=} d_j \ .$$

In Verbindung mit (8) folgt

$$\dim\left(\otimes\phi_{i(\underline{r}(n))}(T_j)\right) = d_j \quad \forall\, j \in |K| \ , \quad \text{w.z.b.w..}$$

(16.4)Corollar

Sei R wie in (16.1), und sei $\overline{T}_o \in |C_q\langle\hat{R}\rangle|$ gegeben. Es existiere eine endliche Kategorie K, eine Unterkategorie K* von K, ein Datum $\overline{\Delta}_o$ für $\overline{T}_o$ und ein $n_o \in \mathbb{N}$, derart daß $([K,\underline{B}_q],K^*,\Phi,\Phi^*,E,\overline{\Delta}_o,n_o)$ mit dem kanonischen Funktor $\Phi: [K,\underline{B}_q] \longrightarrow [K^*,\underline{B}_q]$ und mit $E := \{\overline{\Delta} \in |K(\hat{R})| \,|\, \dim\overline{\Delta} = \dim\overline{\Delta}_o\}$ ein Datensystem für $\overline{T}_o$ bildet. Ferner existiere eine Liftungsbedingung $(G,\overline{\xi}_o)$ für $\phi_{\hat{R}}(\overline{\Delta}_o)$ und - bei geeigneter Wahl einer Algebra $S \in M(\hat{R})$, eines Datums $\Delta_S \in |K(S)|$ und eines Isomorphismus $\delta_S: F_{\gamma_S}(\Delta_S) \longrightarrow \overline{\Delta}_o$ - ein Element

$\xi_S \in G \circ \overline{\pi}(\phi_S(\Delta_S))$ mit $G \circ \tilde{\pi}(\Phi_R^{\wedge}(\delta_S) \circ \gamma\phi_S(\Delta_S),\eta_S)(\xi_S) = \bar{\xi}_o$.

Dann existiert ein $T_o \in |C_q\langle R\rangle|$ mit

$$\widetilde{\otimes_i(T_o)} \simeq \tilde{\bar{T}}_o \ .$$

Beweis:
Offensichtlich ist die Aussage wegen Satz(16.3) eine triviale Konsequenz aus Satz(15.4).

V. Algebraische Singularitäten analytischer k-Räume

17. Lokal-algebraische analytische k-Räume

(17.1) In diesem Abschnitt sei k ein algebraisch abgeschlossener vollständiger nicht-diskret bewerteter Körper mit chark = 0. $\mathscr{K}^d$ bezeichne die Garbe der Keime analytischer Funktionen auf k^d ; nach Oka ist $\mathscr{K}^d$ kohärent (Abhyankar [1], p.386,(42.2)). Unter einem k-Raum verstehen wir ein Paar $Y = (|Y|, \mathcal{O}_Y)$, bestehend aus einem topologischen Raum $|Y|$ und einer Garbe $\mathcal{O}_Y$ von k-Algebren auf $|Y|$. Ein k-Raum Y heißt analytisch, wenn $|Y|$ hausdorffsch ist, und wenn es zu jedem $y \in |Y|$ eine offene Umgebung V von y in $|Y|$, eine offene Menge $U \subset k^d$ und eine endliche (und damit kohärente) Idealgarbe $\mathfrak{I}$ in $\mathscr{K}^d|U$ mit

$$(V, \mathcal{O}_Y|V) \simeq (N(\mathfrak{I}), (\mathscr{K}^d|U)/\mathfrak{I}\,|N(\mathfrak{I}))$$

gibt. Hier bezeichnet $N(\mathfrak{I}) := \{z \in U \mid \mathfrak{I}_z \neq \mathscr{K}^d_z\}$ den Träger von $\mathfrak{I}$.

(17.2) Die einem Polynom $p \in k|X|$ $(X = (X_1, \ldots, X_d))$ zugeordnete analytische Funktion $z \longmapsto p(z)$ bezeichnen wir wieder mit p. Ist $\mathfrak{a} \subset k[X]$ ein Ideal, so sei $\mathfrak{I}_{\mathfrak{a}} \subset \mathscr{K}^d$ die durch

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{a},z} := \{p_z \mid p \in \mathfrak{a}\}.\mathscr{K}^d_z$$

festgelegte endlich Idealgarbe. Wir schreiben

$$Y_{\mathfrak{a},U} := \{N(\mathfrak{I}_{\mathfrak{a}}) \cap U, (\mathscr{K}^d/\mathfrak{I}_{\mathfrak{a}})|N(\mathfrak{I}_{\mathfrak{a}}) \cap U\}$$

für offene Mengen $U \subset k^d$.

(17.3) **Definition**

Sei Y ein analytischer k-Raum und $y \in |Y|$. Y heißt lokal-algebraisch in y, wenn es eine offene Umgebung V von y in Y, ein Ideal $\mathfrak{a} \subset k[X]$ und eine offene Menge $U \subset k^d$

mit $\quad (V, \mathcal{O}_Y|V) \simeq Y_{\mathfrak{a},U} \quad$ gibt.

(17.4) In regulären Punkten y ist Y trivialerweise lokal-algebraisch, in singulären Punkten i.a. nicht. H.Whitney gibt Beispiele an

(1) für zweidimensionale reduzierte komplexe Räume Y, die in jedem Punkt y der (eindimensionalen) Singularitätenmenge S(Y) nicht lokal-algebraisch sind; diese Räume sind in jedem $y \in S(Y)$ reduzibel.

(2) für einen dreidimensionalen normalen komplexen RaumY, der in jedem Punkt y der (eindimensionalen) Singularitätenmenge nicht lokal-algebraisch ist; derartige Räume sind in jedem $y \in S(Y)$ gewiß auch irreduzibel.

(vgl. H.Whitney [1], 14. 15. p. 240 - 244). Der Verfasser hat mit Hilfe eines der Beispiele von Whitney einen zweidimensionalen reduzierten komplexen Raum Y mit einer nicht-algebraisierbaren irreduziblen Singularität angegeben. M.Artin beweist

(3) hat Y in y eine isolierte Singularität, so existieren ein $\mathfrak{a} \subset k[X]$ und ein $z \in N(\mathfrak{J}_{\mathfrak{a}})$ mit

$$\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}} \simeq \widehat{(k^d/\mathfrak{J}_{\mathfrak{a}})_z}$$

(M.Artin [3], p.32, Theorem (3.8))

(4) sind zwei analytische k-Räume Y, Y' formal isomorph in Punkten y, y' (d.h. $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}} \simeq \widehat{\mathcal{O}_{Y',y'}}$), so existieren Umgebungen V von y in Y bzw. V' von y' in Y', derart daß

$$(V, \mathcal{O}_Y|V) \simeq (V', \mathcal{O}_{Y'}|V')$$

(M.Artin [1], p.282, Corollary (1.6) ; hier wird chark = 0 benötigt).

Verbinden wir (3) mit (4), so sehen wir, daß jeder analytische k-Raum Y in einer isolierten Singularität y stets lokal-algebraisch ist. Im Hinblick auf die Dimensionen sind also obige Beispiele für nicht-algebraisierbare Singularitäten optimal. Wir formulieren noch folgendes Corollar aus (4):

(17.5) Lemma ===== Sei Y ein analytischer k-Raum und $y \in |Y|$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) Y ist lokal-algebraisch in y

(2) es existiert ein Ideal $\mathfrak{a} \subset \{X_1, \ldots, X_d\}.k[X]$ mit

$$\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}} \simeq k[[X]]/\mathfrak{a}.k[[X]].$$

(17.6) Aufgrund dieser Aussage kann die Frage, ob ein gegebener Raum Y in $y \in |Y|$ lokal-algebraisch ist, als ein Algebraisierungsproblem wie in (9.1) über einer henselschen lokalen Algebra formuliert werden. Wir geben dazu zunächst die Henselierung der (k,0)-Algebra $(k[X]_{(X)}, (X).k[X]_{(X)})$ an.

(1) Eine formale Potenzreihe $f \in k[[X]]$ heißt eine algebraische Funktion in $X = (X_1,\ldots,X_d)$ genau dann, wenn folgendes gilt: Es existieren ein $N \in \mathbb{N}$, Polynome $P_1,\ldots,P_N \in k[X,Y_1,\ldots,Y_N]$ und Potenzreihen $f_1,\ldots,f_N$ mit

(i) $P_\nu(0) = 0 \quad \nu=1,\ldots,N$

(ii) $P_\nu(X,f_1(X),\ldots,f_N(X)) = 0 \quad \nu=1,\ldots,N$

(iii) $\dfrac{\partial(P_1,\ldots,P_N)}{\partial(Y_1,\ldots,Y_N)}(0) \neq 0$

(iv) $f - f(0) \in \{f_1,,,.f_N\}$.

$k\{X\}$ bezeichne die Menge aller algebraischen Funktionen.

Wir nennen eine formale Potenzreihe also eine algebraische Funktion, wenn sie als Lösung des Satzes über implizite Funktionen für polynomiale Gleichungssysteme gewonnen werden kann. Es sind dies genau die Potenzreihen f, die eine nicht-triviale polynomiale Gleichung $P(X,f(X)) = 0$ erfüllen (M.Artin[4], p.5). Also ist $k\{X\}$ eine offensichtlich quasi-lokale k-Unteralgebra von $k[[X]]$; ferner gilt: Sind $F_1,\ldots,F_N \in k\{X\}[Y_1,..,Y_N]$ mit $F_\nu(0) = 0$ und $\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_N)}{\partial(Y_1,\ldots,Y_N)}(0) \neq 0$ gegeben, so sind die nach dem Satz über implizite Funktionen erhaltenen formalen Potenzreihen $f_1,\ldots,f_N$ mit $F_\nu(X,f_1(X),\ldots,f_N(X)) = 0$ $(\nu=1,..,N)$ wieder algebraische Funktionen.

(2) Wir betrachten den Träger $(k[X]_{(X)})^h$ der Henselierung von $(k[X]_{(X)},(X).k[X]_{(X)})$ als k-Unteralgebra von $k[[X]]$ (vgl. (16.1)). Es gilt

$$k\{X\} = (k[X]_{(X)})^h.$$

Beweis:
Jedes $f \in k\{X\}$ ist algebraisch über $k[X]_{(X)}$ und gehört somit - als Element der Komplettierung von $k[X]_{(X)}$ - zu $(k[X]_{(X)})^h$ (Nagata [1]). Also reicht es zu zeigen, daß $k\{X\}$ henselsch ist (vgl. Grothendieck [3], EGAIV (18.6.6.(v)) bzgl. 'noethersch'). Dazu wiederum reicht es zu zeigen, daß $k\{X\}$ schwach henselsch ist (vgl. Abhyankar [1], § 20, (20.5)), d.h.:

(i) Ist $F(y) = y^{e+1} + \sum_{\nu=0}^{e} f_\nu y^\nu \in k\{X\}[y]$ ein normiertes Polynom mit $f_e(0) \neq 0$, $f_0(0) = \ldots = f_{e-1}(0) = 0$ $(e > 0)$, so existieren ein $f \in k\{X\}$ und ein normiertes Polynom $G(y) = y^e + \sum_{\nu=0}^{e-1} g_\nu y^\nu$ mit $f(0) = f_e(0)$, $g_0(0) = \ldots = g_{e-1}(0) = 0$ und $(y + f).G(y) = F(y)$.

Zum Nachweis von (i) geben wir F mit den angegebenen Eigenschaften vor. Sind f und G wie in (i) gefunden, so gilt

$$y^{e+1} + (g_{e-1} + f)y^e + \sum_{\nu=1}^{e-1} (g_{\nu-1} + fg_\nu)y^\nu + fg_0 = y^{e+1} + \sum_{\nu=0}^{e} f_\nu y^\nu$$

und folglich $(z := f_e(0))$

$$\begin{aligned}
f_e &= g_{e-1} + f &&= g_{e-1} + (f-z) + z \\
f_{e-1} &= g_{e-2} + fg_{e-1} &&= g_{e-2} + (f-z)g_{e-1} + zg_{e-1} \\
&\vdots \\
f_1 &= g_0 + fg_1 &&= g_0 + (f-z)g_1 + zg_1 \\
f_0 &= fg_0 &&= (f-z)g_0 + zg_0 .
\end{aligned}$$

Wir betrachten deshalb im Polynomring $k\{X\}[Y_0,\ldots,Y_{e-1},Y]$ durch die Polynome

$$\begin{aligned}
P_0 &= YY_0 + zY_0 - f_0 \\
P_1 &= Y_0 + YY_1 + zY_1 - f_1 \\
&\vdots \\
P_{e-1} &= Y_{e-2} + YY_{e-1} + zY_{e-1} - f_{e-1} \\
P_e &= Y_{e-1} + Y + z - f_e
\end{aligned}$$

gegebene Gleichungssystem. Offensichtlich gilt

$$P_0(0) = \ldots = P_e(0) = 0$$

und

$$\frac{\partial(P_0,\ldots,P_e)}{\partial(Y_0,\ldots,Y_{e-1},Y)}(0) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} Y+z & 0 & 0 & \cdots & 0 & Y_0 \\ 1 & Y+z & 0 & \cdots & 0 & Y_1 \\ 0 & 1 & Y+z & 0 & \cdots & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 1 & Y+z & Y_{e-1} \\ 0 & & & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_0$$

$$= \det \begin{pmatrix} z & & & & \\ 1 & z & & & \\ & 1 & z & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & z \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$= z^e \neq 0.$

Der Satz über implizite Funktionen liefert eine Lösung

$$(g_0,\ldots,g_{e-1},f_0) \in \varkappa_{e+1}(X).k\{X\}$$

des obigen Gleichungssystems. Mit

$$G(y) := y^e + \sum_{\nu=0}^{e-1} g_\nu y^\nu$$

und $\quad f := f_0 + z$

folgt $\quad (y + f).G(y) = F(y)$, w.z.b.w..

(17.7)Satz Seien $f_1,\ldots,f_r \in (X).k[[X]]$ algebraische Funktionen.
==== Dann gibt es Unbestimmte $Y = (Y_1,\ldots,Y_M)$ und Polynome $P_1,\ldots,P_N \in (X,Y)$ mit

$$k[[X,Y]]/\{P_1,\ldots,P_N\}.k[[X,Y]] \simeq k[[X]]/\{f_1,\ldots,f_r\}.k[[X]].$$

Beweis (vgl. Grauert-Remmert [1], S.104 - 105):
Wir wählen zu f_ϱ Unbestimmte $Y_{\varrho 1},\ldots,Y_{\varrho N_\varrho}$ und Polynome $P_{\varrho 1}$, $\ldots,P_{\varrho N_\varrho} \in k[X,Y_{\varrho 1},\ldots,Y_{\varrho N_\varrho}]$ mit

(i) $P_{\varrho\nu}(0) = 0$

(ii) $\dfrac{\partial(P_{\varrho 1},\ldots,P_{\varrho N_\varrho})}{\partial(Y_{\varrho 1},\ldots,Y_{\varrho N_\varrho})}(0) \neq 0,$

derart daß f_ϱ als eine Koordinate der nach dem Satz über impli zite Funktionen erhaltenen Lösung $\underline{f}$ des Gleichungssystems $P_{\varrho\nu}(X,\underline{f}(X)) = 0, \nu = 1,\ldots,N$ auftritt. Wir setzen dann

$$Y := (Y_{11},\ldots,Y_{1N_1},\ldots,Y_{r1},\ldots,Y_{rN_r}).$$

Aufgrund der Bedingungen (i) und (ii) bilden

$$P_{11},\ldots,P_{1N_1},\ldots,P_{r1},\ldots,P_{rN_r},X_1,\ldots,X_d$$

offensichtlich ein reguläres System von Parametern für $k[[X,Y]]$, so daß durch

$$\tau(X_\delta) := X_\delta \quad \delta=1,\ldots,d$$

$$\tau(P_{\varrho\nu}) := 0 \quad \varrho=1,\ldots,r,\nu=1,\ldots,N$$

ein k-Algebra-Epimorphismus $\tau\colon k[[X,Y]] \to k[[X]]$ definiert wird. Dann gilt

$$P_{\varrho\nu}(X,\tau(Y_{\varrho 1}),\ldots,\tau(Y_{\varrho N_\varrho})) = 0, \nu = 1,\ldots,N ,$$

so daß $(\tau(Y_{\varrho 1}),\ldots,\tau(Y_{\varrho N_\varrho}))$ genau die Lösung des Gleichungssystem $P_{\varrho\nu}(X,\underline{f}(X)) = 0, \nu = 1,\ldots,N$ ist. Es existiert also ein $\sigma_\varrho \in \{1,\ldots,N_\varrho\}$ mit $f_\varrho = \tau(Y_{\varrho\sigma_\varrho})$.
Sei nun $\varepsilon\colon k[[X]] \to k[[X]]/\{f_1,\ldots,f_r\}.k[[X]]$ die Projektion, und sei $g \in \ker\varepsilon\circ\tau$. Wegen $\tau(g) \in \ker\varepsilon$ existieren dann $g_1,\ldots,g_r \in k[[X]]$ mit

$$\tau(g) = \sum_{\varrho=1}^{r} g_\varrho f_\varrho .$$

$$\Longrightarrow \quad \tau(g) = \sum_{\varrho=1}^{r} g_\varrho \tau(Y_{\varrho\sigma_\varrho}) = \Big(\sum_{\varrho=1}^{r} g_\varrho Y_{\varrho\sigma_\varrho}\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad g - \sum_{\varrho=1}^{r} g_\varrho Y_{\varrho\sigma_\varrho} \in \ker\tau$$

$$\Longrightarrow \qquad g \in \ker\tau + \{Y_{1\sigma_1},\ldots,Y_{r\sigma_r}\}.k[[X,Y]] =: \mathfrak{A} .$$

Umgekehrt annuliert $\varepsilon\circ\tau$ offensichtlich jedes Element des Ideals $\mathfrak{A}$. Also gilt $\ker\varepsilon\circ\tau = \mathfrak{A}$ und somit

$$k[[X]]/\{f_1,\ldots,f_r\}.k[[X]] \simeq k[[X,Y]]/\mathfrak{A} .$$

Damit ist der Satz bewiesen, denn $\mathfrak{A}$ wird durch die Polynome

$$P_{\varrho\nu},\ Y_{\varrho\sigma_\varrho} \quad \varrho=1,\ldots,r,\ \nu=1,\ldots,N$$

erzeugt.

(17.8)Sei Y ein analytischer k-Raum und $y\in|Y|$. Es sei

$$|\overline{T}_o| := \widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$$

$$\overline{\mathfrak{f}}_o := \mathfrak{m}(\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}) \text{ das maximale Ideal von } \widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$$

$$\overline{\Theta}_o : k[[X]] \to \widehat{\mathcal{O}_{Y,y}} \text{ ein Epimorphismus}$$

und $\quad \overline{T}_o := (|\overline{T}_o|,\overline{\mathfrak{f}}_o)_{\overline{\Theta}_o}$.

Wir setzen $R := (k\{X\},(X).k\{X\})_{id}$. Bezeichnet $\varrho: k(X)_{(X)} \to k\{X\}$ die Inklusionsabbildung, so ist $\tilde{R}_\varrho$ nach (17.6) die Henselierung von $(k[X]_{(X)},(X).k[X]_{(X)})$. Somit erhalten wir durch Verbindung von (17.5) und (17.7):

(17.9)Folgerung

Sei Y ein analytischer k-Raum und $y\in|Y|$. Man lege $\overline{T}_o$ und R wie in (17.8) fest. Dann genügt R den Voraussetzungen des Artinschen Approximationssatzes, und folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) Y ist lokal-algebraisch in y

(2) $\exists\ T_o \in |C_q\langle R\rangle| : \widetilde{\otimes_i(T_o)} \simeq \tilde{\overline{T}}_o$.

(17.10)Anmerkung

Aufgrund dieses Ergebnisses liegt es nahe, zur Untersuchung der Frage, ob ein gegebener analytischer Raum Y in einem Punkt $y\in|Y|$ lokal-algebraisch ist, den in Kapitel III und IV für $\underline{B}_o = \underline{B}_q$ entwickelten Formalismus zu verwenden. Auf den Fall $\underline{B}_c = \underline{B}_e$ wird man jedoch z.B. dann geführt, wenn man nicht von Einbettungen der Algebra $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$ ausgeht, sondern - im Fall $\dim\mathcal{O}_{Y,y} = d$ - von endlichen Homomorphismen $K[[X]] \to \widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$. (Vgl. hierzu: M.Artin[5], Beweis der Sätze (1.6),(1.7))

18. Anmerkungen zur Anwendung des formalen Algebraisierungssatzes

(18.1) In Satz (11.2) bzw. Satz (15.4) wird die Existenz einer Algebra $T_o \in |C_o\langle R\rangle|$ mit $\widehat{\mathfrak{E}_i(T_o)} \simeq \bar{\bar{T}}_o$ durch Approximation von Isomorphieklassen von Daten nachgewiesen. Bei Anwendung dieser Sätze muß also zunächst ein Datensystem $(\underline{K},K^*,\Phi,\Phi^*,E,\overline{\Delta}_o,n_o)$ für $\bar{T}_o$ gefunden werden, und zwar derart, daß der Isomorphieklassenfunktor D von $\underline{K}$ Ω-approximierbar ist. Aus dem Beweis des Artinschen Algebraisierungssatzes (M.Artin [5]) schließt man, daß dies bei dem Ansatz $\underline{B}_o = \underline{B}_e$ stets möglich ist. Das Kategoriensystem $\underline{K}$ wird durch Funktorkategorien $[K,S\text{-}Mod]$ (K endlich) gegeben; d.h. Daten sind Diagramme in Kategorien von Moduln. Die Kategorie K^* ist trivial (d.h. $card|K^*| = 1$, $cardMorK^* = 1$), so daß die Existenz der Algebra T_o ausschließlich von der Existenz einer " approximierbaren" Liftungsbedingung $(G,\bar{\xi}_o)$ für $\bar{T}_o$ abhängt. Aus (8.6) und (10.4) können wir nun sofort folgern, daß die Sätze (11.2) bzw. (15.4) in eine Version des Artinschen Satzes über die Algebraisierung formaler Moduli übergehen, sofern wir das von Artin benutzte Datensystem oder überhaupt Datensysteme mit approximierbarem Isomorphieklassenfunktor D und trivialer Kategorie K^* wählen. Für die Untersuchung spezieller Singularitäten erscheint es jedoch angebracht, wenn möglich auch speziellere Datensysteme zuzulassen.

Wir demonstrieren an einem Beispiel die Art der Isomorphiekriterien (×), die - im Fall der im 16. und 17. Abschnitt betrachteten Algebra R und im Fall $\underline{B}_o = \underline{B}_q$ - für Systeme von Funktorkategorien $\underline{K} = [K,\underline{B}_q]$ in (11.2) herangezogen werden können.

(18.2) Es sei $u \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ und $K := K(u)$ die in (3.4) angegebene Kategorie der 'Sequenzen' der Länge u+1. Ferner sei - in diesem Augenblick zur Vereinfachung der Schreibweise - $K^* = K$, $\Phi\colon [K,\underline{B}_q] \longrightarrow [K^*,\underline{B}_q]$ der identische Morphismus und $\Phi^*\colon [K^*,\underline{B}_q] \longrightarrow \underline{B}_q$ der durch $0 \in [K^*]$ festgelegte Morphismus.

Die Voraussetzung, daß $\bar{T}_o\colon K^* \longrightarrow \underline{B}_q\langle R\rangle$ für $\bar{T}_o$ bedeutet, daß alle auftretenden R-Algebra-Homomorphismen lokal sind, die

Vorgabe einer Sequenz

$$|\overline{T}_o| \xrightarrow{\varphi_1} |\overline{T}_1| \xrightarrow{\varphi_2} \cdots\cdots \xrightarrow{\varphi_u} |\overline{T}_u| \ .$$

Durch ein weiteres Diagramm $\overline{\Delta}\colon K \longrightarrow C_q\langle\hat{R}\rangle$ und einen Morphismus $\delta\colon \overline{\mathbb{T}}(\overline{\Delta}_o) \longrightarrow \overline{\mathbb{T}}(\overline{\Delta})$ ist dann das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
|\overline{T}_o| & \xrightarrow{\varphi_1} & |\overline{T}_1| & \xrightarrow{\varphi_2} & \cdots\cdots & \xrightarrow{\varphi_u} & |\overline{T}_u| \\
\downarrow{\scriptstyle \delta_o} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta_u} \\
|T_o| & \xrightarrow[\psi_1]{} & |T_1| & \xrightarrow[\psi_2]{} & \cdots\cdots & \xrightarrow[\psi_u]{} & |T_u|
\end{array}$$

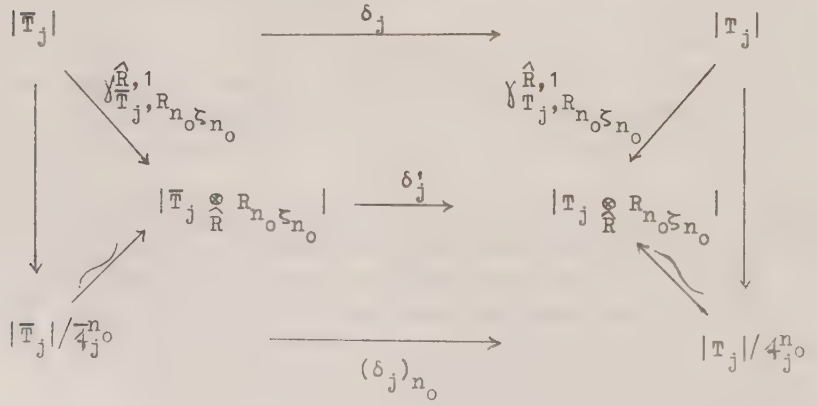
$(T_j := \overline{\Delta}(j), \psi_j := \overline{\Delta}(j-1,j))$ bestimmt. Ein Morphismus

$$\delta'\colon \otimes_{\zeta_{n_o}} \circ \overline{\Delta}_o \longrightarrow \otimes_{\zeta_{n_o}} \circ \overline{\Delta} \ ,$$

für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\mathbb{T}}(\overline{\Delta}_o) & \xrightarrow{\delta} & \overline{\mathbb{T}}(\overline{\Delta}) \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma_{\overline{\Delta}_o,\zeta_{n_o}}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{\overline{\Delta},\zeta_{n_o}}} \\
\overline{\mathbb{T}}(\otimes_{\zeta_{n_o}} \circ \overline{\Delta}_o) & \xrightarrow{\delta'} & \overline{\mathbb{T}}(\otimes_{\zeta_{n_o}} \circ \overline{\Delta})
\end{array}$$

kommutativ ist, legt für jedes $j \in |K|$ das folgende kommutative Diagramm fest (vgl.(6.5)):



δ' ist also ein Isomorphismus genau dann, wenn die durch δ_j induzierte Abbildung $(\delta_j)_{n_o}$ ein Isomorphismus ist, j=0,...,u.

Für spezielle Algebren $|\overline{T}_o|$ gewinnt man in der Tat durch Stratifikation von Idealen Aussagen des folgenden Typs:
(1) Zu $A_o = |\overline{T}_o|$ existieren eine Sequenz

$$A_o \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_u$$

von Quotienten von $|\hat{R}|$ und ein $n_o \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: ist

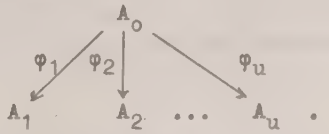
$$\begin{array}{ccccccc} A_o & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & \cdots\cdots & \longrightarrow & A_u \\ \downarrow{\scriptstyle \delta_o} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta_u} \\ B_o & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & \cdots\cdots & \longrightarrow & B_u \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Quotienten von $|\widehat{R}|$ mit
(i) $\dim B_j = \dim A_j$, j=0,...,u
(ii) $(\delta_j)_{n_o} : A_j/\mathfrak{m}(A_j)^{n_o} \longrightarrow B_j/\mathfrak{m}(B_j)^{n_o}$ ist ein Isomorphismus, j=0,...,u,
so ist δ_o ein Isomorphismus.

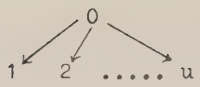
Mittels (1) wird also ein Datensystem für $\overline{T}_o$ mit $\underline{K} = [K(u), \underline{B}_q]$, $K^* = K(u)$ und E wie in (16.3), (16.4) festgelegt.

Für reduzierte Algebren $|\overline{T}_o|$ liefert die Zerlegung in irreduzible Komponenten ein Datensystem. Wir zeigen dazu:

(18.3) Lemma Sei A_o eine reduzierte lokale k-Algebra, und seien $\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_u$ die minimalen Primideale von A_o.
(1) u=1:
Ist $\delta_o : A_o \longrightarrow B_o$ ein Epimorphismus und gilt $\dim B_o = \dim A_o$, so ist δ_o ein Isomorphismus.
(2) u>1:
Es sei $\varphi_j : A_o \longrightarrow A_j := A_o/\mathfrak{P}_j$ die Projektion und Δ_o das Diagramm



Ist Δ ein weiteres Diagramm vom Typ



und ist $\delta: \Delta_0 \longrightarrow \Delta$ ein Morphismus von Diagrammen, derart daß

(i) $\dim\Delta(j) = \dim A_j$, $j=1,\ldots,u$

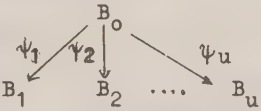
(ii) δ_j ist surjektiv , $j=0,\ldots,u$,

so ist δ ein Isomorphismus.

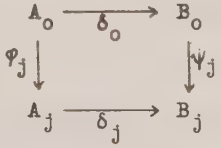
Beweis:

(1): Für u=1 ist A_0 ein Integritätsbereich; enthält $\ker\delta_0$ ein Element $f \neq 0$, so folgt also $\dim A_0 > \dim A_0/f.A_0 \geq \dim A_0/\ker\delta_0 = \dim B_0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist δ_0 injektiv, w.z.b.w..

(2): Das Diagramm Δ sei durch



gegeben. Nach (1) sind die Epimorphismen δ_j, $j=1,\ldots,u$, injektiv, so daß die Kommutativität des Diagramms



offenbar $\ker\delta_0 \subset \ker\psi_j \circ \delta_0 = \ker\varphi_j = \mathfrak{P}_j$ und somit

$$\ker \delta_0 \subset \bigcap_{j=1}^{u} \mathfrak{P}_j = (0)$$

zur Folge hat. δ_0 ist also ebenfalls ein Isomorphismus.

Im Fall kompletter Algebren ist ein Homomorphismus $\varphi: A \longrightarrow B$ bereits dann surjektiv, wenn die durch φ induzierte Abbildung $\varphi_2: A/\mathfrak{m}(A)^2 \longrightarrow B/\mathfrak{m}(B)^2$ surjektiv ist. Durch die in (18.2) angegebene Umformung erhält man aus (18.3) und (16.3) somit folgendes Ergebnis:

(18.4)Corollar

(1) Sei $\overline{T}_o \in |C_q\langle\hat{R}\rangle|$ ein Integritätsbereich, K^* eine triviale Kategorie, und seien $\Phi : \underline{B}_q \longrightarrow [K^*,\underline{B}_q]$, $\Phi^*: [K^*,\underline{B}_q] \longrightarrow \underline{B}_q$ die kanonischen Isomorphismen. Wir setzen

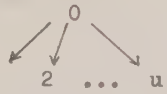
$$E := \{\overline{T} \in |C_q\langle\hat{R}\rangle| \mid \dim\overline{T} = \dim\overline{T}_o\}.$$

Ferner sei D der Isomorphieklassenfunktor von $\underline{B}_q$ und

$$\Omega := \{\overline{\omega} \in D(\hat{R}) \mid \overline{\omega} \subset E\}.$$

Dann ist $(\underline{B}_q,K^*,\Phi,\Phi^*,E,\overline{T}_o,2)$ ein Datensystem für $\overline{T}_o$, und der Funktor D ist Ω-approximierbar.

(2) Sei $\overline{T}_o \in |C_q\langle\hat{R}\rangle|$ eine reduzierte Algebra mit minimalen Primidealen $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_u$ (u>1). Es sei K die durch das Schema



bestimmte Kategorie und $\overline{\Delta}_o$ das durch

$$\overline{\Delta}_o(0) := \overline{T}_o$$

$$\overline{\Delta}_o(j) := \overline{T}_o/\mathfrak{p}_j,\ j=1,\ldots,u$$

$$\overline{\Delta}_o(0,j) := \text{Projektion}$$

festgelegte Diagramm vom Typ K in $C_q\langle\hat{R}\rangle$. Ferner sei $K^* = K$, $\Phi: [K,\underline{B}_q] \longrightarrow [K^*,\underline{B}_q]$ der identische und $\Phi^*: [K^*,\underline{B}_q] \longrightarrow \underline{B}_q$ der durch $0 \in |K^*|$ definierte Morphismus. Schließlich sei wieder

$$E := \{\overline{\Delta} \in [K,\underline{B}_q] \mid \dim\overline{\Delta} = \dim\overline{\Delta}_o\},$$

D der Isomorphieklassenfunktor von $[K,\underline{B}_q]$ und

$$\Omega := \{\overline{\omega} \in D(\hat{R}) \mid \overline{\omega} \subset E\}.$$

Dann ist $([K,\underline{B}_q],K^*,\Phi,\Phi^*,E,\overline{\Delta}_o,2)$ ein Datensystem für $\overline{T}_o$, und der Funktor D ist Ω-approximierbar.

(18.5) In (16.4) können wir im Fall reduzierter Algebren also das durch die Zerlegung in irreduzible Komponenten induzierte Datensystem heranziehen. Dies ist im Fall eines Integritätsbereichs offenbar optimal, sofern überhaupt eine Liftungsbedingung benötigt wird. Im Falle $u > 1$ ist K^* hingegen nicht trivial, und das Auffinden einer Liftungsbedingung beschränkt sich i.a. nicht auf $\overline{T}_o$.

Aus (9.6) geht hervor, daß die Algebraisierung - vorausgesetzt die Ω-Approximierbarkeit von D - stets dann möglich ist, wenn das Kriterium (9.4(×)) nicht den Morphismus δ benötigt, sondern die Isomorphie $\overline{\tilde{T}}_o \xrightarrow{\sim} \overline{\tilde{T}}$ direkt aus der Isomorphie $F_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta}_o) \xrightarrow{\sim} F_{\zeta_{n_o}}(\overline{\Delta})$ geschlossen werden kann (und somit eine Erweiterung der gegebenen Daten überflüssig ist). Isomorphiekriterien dieser Art sind für isolierte Singularitäten bekannt (vgl. Hironaka - Rossi [1] für den reindimensionalen reduzierten Fall, Milnor [1](10.8) für den recht einfachen Fall einer Hyperflächensingularität, Mather [1](9.2) für vollständige Durchschnitte und Hironaka [1]§3 für den allgemeinen Fall). Bei Heranziehung entsprechender Datensysteme liefert also bereits (9.6) die Algebraisierbarkeit isolierter Singularitäten.

Literaturverzeichnis

1. Abhyankar, S.S.

[1] Local analytic Geometry. Academic Press, New York, London, 1964

2. Artin, M.

[1] On the solutions of analytic equations. Inventiones math. 5, 277 - 291 (1968)

[2] The implicit function theorem in algebraic geometry. Algebraic Geometry, Papers presented at the Bombay Colloquium 1968. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay. Oxford University Press, 1969 (13 - 34)

[3] Algebraic approximation of structures over complete local rings. Publ. Math. I.H.E.S. N°36, 23 - 58 (1969)

[4] Algebraic Spaces. Whittemore Lectures Yale University 1969 (mimeographed notes)

[5] Algebraization of formal moduli: I. Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira. University of Tokyo Press, Princeton University Press, 1969 (21 - 71)

[6] Algebraization of formal moduli: II. Existence of modifications. Ann. of Math. 91, 88 - 135 (1970)

3. Grauert, H. und R. Remmert

[1] Analytische Stellenalgebren. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 176. Springer - Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971

4. Grothendieck, A.

[1] Éléments de Géométrie Algébrique IV (Première Partie) Publ. Math. I.H.E.S. N°20 (1964)

[2] Éléments de Géométrie Algébrique IV (Troisième Partie) Publ. Math. I.H.E.S. N°28 (1966)

[3] Éléments de Géométrie Algébrique IV (Quatrième Partie) Publ. Math. I.H.E.S. N°32 (1967)

5. Hironaka H.

[1] Formal line bundles along exceptional loci. Algebraic Geometry, Papers presented at the Bombay Colloquium 1968. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay. Oxford University Press, 1969 (201 - 218)

6. Hironaka H. and H. Rossi

[1] On the Equivalence of Imbeddings of Exceptional Complex Spaces. Math. Annalen 156, 313 - 333 (1964)

7. Mather, J.N.

[1] Stability of C^{∞} Mappings. III : Finitely determined map - germs. Publ. Math. I.H.E.S. N°35, 127 - 156 (1968)

8. Milnor, J.

[1] Singular Points of Complex Hypersurfaces. Annals of Mathematics Studies Number 61. Princeton University Press and the University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1968

9. Nagata, M.

[1] Local Rings. Interscience Publishers, New York, London, 1962

10. Schlessinger, M.

[1] Functors of Artin Rings. Trans. Ame. Math. Soc. vol 130, 208 - 222 (1968)

11. Schnitker, J.

[1] Singularitäten komplexer Räume. Diplomarbeit Göttingen 1969 (nicht veröffentlicht)

12. Schubert, H.

[1] Kategorien I. Heidelberger Taschenbücher Band 65 Springer - Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1970

[2] Kategorien II. Heidelberger Taschenbücher Band 66 Springer - Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1970

13. Whitney, H.
[1] Local Properties of Analytic Varieties. Differential and Combinatorial Topology, Princeton University Press, Princeton, 1965 (205 - 244)

14. Zariski, O. and P. Samuel
[1] Commutative Algebra Vol.I. Van Nostrand Company, Princeton, 1958
[2] Commutative Algebra Vol.II. Van Nostrand Company, Princeton, 1960.

Lebenslauf

Am 22. September 1943 wurde ich als Sohn des Bäckermeisters Helmut Schnitker und seiner Ehefrau Emmy, geb. Warnecke, in Elsfleth, Kreis Wesermarsch, geboren. Von Ostern 1950 bis Ostern 1954 besuchte ich die Volksschule, anschließend bis Mai 1959 die Mittelschule in Elsfleth. 1959 verzog ich nach Wildeshausen, Kreis Oldenburg; ich wechselte auf die dortige Mittelschule über. Nach der Mittleren Reife besuchte ich bis zur Reifeprüfung am 18.2.63 das mathematisch - naturwissenschaftliche Gymnasium an der Willmsstraße in Delmenhorst.

Ich begann das Studium der Mathematik im Sommersemester 1963 in Göttingen. Nach dem Vordiplom im Sommersemester 1965 habe ich mich hauptsächlich mit komplexer Analysis unter Anleitung von Prof.Dr.H.Grauert beschäftigt. Am 24.4.1969 legte ich die Diplomprüfung für Mathematik ab.

Vom 1.7.1969 bis 30.6.1971 war ich als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Institut für mathematische Statistik der Universität Göttingen tätig. Seitdem arbeite ich an diesem Institut als wissenschaftlicher Assistent.

Ich bin seit 1969 verheiratet und lebe seit 1971 zusammen mit meiner Frau Gisela Schnitker, geb. Wernecke, und meinem am 29.11.1969 geborenen Sohn Jan in Bodenfelde, Kreis Northeim.